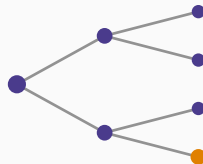


Probabilités

Chapitre 8 : Le théorème de Bayes



Renverser la question

L'arbre du risque de crédit

Le théorème

Ce que Bayes change dans les décisions

Ce qu'il faut retenir

Renverser la question

Deux questions qu'on prend pour une seule

Elles ne sont pas symétriques

$P(\text{alerte} \mid \text{défaut})$: *un emprunteur qui va faire défaut sera-t-il détecté ?* C'est la **qualité du modèle**, mesurée sur des cas connus.

$P(\text{défaut} \mid \text{alerte})$: *un emprunteur signalé va-t-il vraiment faire défaut ?* C'est la **question du décideur**, posée sur un cas inconnu.

L'écart entre les deux peut être immense

« Presque tous les joueurs professionnels de basket sont grands » est vrai. « Presque tous les gens grands sont joueurs professionnels de basket » est absurde.

C'est le même renversement, et c'est le sujet du chapitre.

L'arbre du risque de crédit

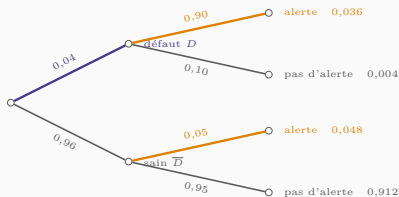
Un modèle de détection

Une banque dispose d'un modèle d'alerte. Sur son historique :

- 4 % des crédits font défaut — c'est le **taux de base**, $P(D) = 0,04$;
- le modèle détecte 90 % des défauts — la **sensibilité**, $P(\text{alerte} \mid D) = 0,90$;
- il signale à tort 5 % des bons crédits — le **taux de fausse alerte**, $P(\text{alerte} \mid \overline{D}) = 0,05$.

Un dossier vient de déclencher une alerte. Faut-il refuser le crédit ?

L'arbre, et ce qu'il donne



l'arbre se lit **de gauche à droite** : on part de la cause, on va vers le signal

La question de Bayes renverse l'arbre.

L'arbre donne $P(\text{alerte} \mid D) = 0,90$.

Le banquier veut $P(D \mid \text{alerte})$.

Probabilités totales :

$$P(\text{alerte}) = 0,036 + 0,048 = 0,084$$

Puis Bayes :

$$P(D \mid \text{alerte}) = \frac{0,036}{0,084} = 0,43$$

Un modèle qui détecte 90 % des défauts se trompe pourtant **plus d'une fois sur deux** quand il crie au loup.

Premier temps : les probabilités totales

$$P(\text{alerte}) = \underbrace{0,04 \times 0,90}_{\text{vraies alertes}} + \underbrace{0,96 \times 0,05}_{\text{fausses alertes}} = 0,036 + 0,048 = 0,084$$

Second temps : la part qui nous intéresse

$$P(D \mid \text{alerte}) = \frac{P(D \cap \text{alerte})}{P(\text{alerte})} = \frac{0,036}{0,084} = 0,43$$

Un modèle fiable à quatre-vingt-dix pour cent se trompe plus d'une fois sur deux

Sur cent alertes, **57** concernent des crédits parfaitement sains.

Le modèle n'est pourtant pas mauvais : il détecte bien **90 %** des défauts. Le problème n'est pas sa performance, c'est **le nombre de bons dossiers**.

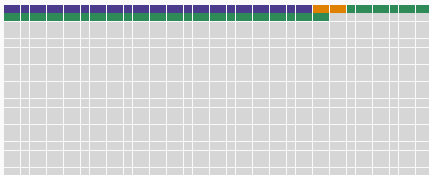
Où va l'erreur

4 % de mauvais dossiers, 96 % de bons. Cinq pour cent d'une très grande population donne plus de cas que quatre-vingt-dix pour cent d'une très petite.

$$0,05 \times 96 = 4,8 \quad > \quad 0,90 \times 4 = 3,6$$

Les fausses alertes sont plus nombreuses que les vraies, parce que les bons dossiers sont vingt-quatre fois plus nombreux.

Le voir en une image



1 000 dossiers de crédit, un carré par dossier

■ 36 défauts que le modèle signale

■ 4 défauts qu'il manque

■ 48 dossiers sains signalés à tort

■ 912 dossiers sains, non signalés

Le modèle a crié au loup 36 + 48 = 84 fois.

Sur ces 84 alertes, 36 correspondent à un vrai défaut :

$$\frac{36}{84} = 0,43$$

Compter des *effectifs* plutôt que manipuler des probabilités rend la formule de Bayes presque évidente. C'est la meilleure façon de l'enseigner — et de la vérifier.

Le théorème

Théorème de Bayes

Pour un système complet $B_1, \dots, B_k$ et un événement A de probabilité non nulle :

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j) P(A | B_j)}{\sum_i P(B_i) P(A | B_i)}$$

Il n'y a rien à démontrer

Le numérateur est $P(B_j \cap A)$ écrit avec les probabilités composées. Le dénominateur est $P(A)$ écrit avec les probabilités totales.

Bayes est donc simplement la définition du conditionnement, dont on a développé les deux étages. Sa portée, en revanche, est considérable.

Trois mots

Terme	Notation	Sens
Probabilité a priori	$P(B_j)$	ce que l'on croyait avant
Vraisemblance	$P(A \mid B_j)$	ce que le modèle prédit
Probabilité a posteriori	$P(B_j \mid A)$	ce que l'on croit après

Bayes est une machine à réviser une opinion

On part d'une croyance (4 % de défaut), on observe un signal (l'alerte), on obtient une croyance révisée (43 %).

L'information n'a pas donné une certitude : elle a **déplacé** une probabilité. C'est ainsi qu'un décideur apprend — et c'est le fondement de toute la statistique dite bayésienne.

Ce que Bayes change dans les décisions

L'erreur de raisonnement la plus répandue

Interrogés sur ce problème, la plupart des gens — y compris des professionnels — répondent « environ 90 % ». Ils confondent la sensibilité avec la réponse à leur question.

L'erreur consiste à **oublier le taux de base** : quand l'événement recherché est rare, un signal même fiable reste le plus souvent une fausse alerte.

Trois domaines où la même erreur se produit

- **Dépistage médical** : une maladie touchant 1 personne sur 1 000 et un test fiable à 99 % donnent une valeur prédictive d'environ 9 %.
- **Détection de fraude** : les équipes de contrôle croulent sous les faux positifs, non par mauvaise détection mais par rareté de la fraude.
- **Justice** : la « probabilité que l'empreinte coïncide par hasard » n'est pas la « probabilité que l'accusé soit innocent ».

Trois conclusions opérationnelles

1. Un modèle ne s'évalue pas sur sa seule sensibilité : il faut connaître le **taux de base**.
2. Sur un événement rare, un signal doit être **confirmé** — d'où les procédures à deux niveaux, alerte puis instruction.
3. Baisser le taux de fausse alerte est souvent plus rentable que monter la sensibilité.

Vérification du point 3

Sensibilité portée à 99 %, fausses alertes inchangées :

$$P(D \mid \text{alerte}) = \frac{0,0396}{0,0396 + 0,048} = 0,45$$

Sensibilité inchangée, fausses alertes ramenées à 1 % :

$$P(D \mid \text{alerte}) = \frac{0,036}{0,036 + 0,0096} = 0,79$$

Le second effort vaut sept fois le premier.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. $P(A | B)$ et $P(B | A)$ sont **deux nombres différents**; les confondre est l'erreur de base.
2. Bayes : $P(B_j | A) = \frac{P(B_j)P(A | B_j)}{\sum_i P(B_i)P(A | B_i)}$.
3. C'est le conditionnement dont on a développé numérateur et dénominateur : rien de plus.
4. Vocabulaire : **a priori**, **vraisemblance**, **a posteriori**.
5. Quand l'événement est **rare**, un signal fiable produit surtout des fausses alertes.
6. Sur un événement rare, réduire les fausses alertes est bien plus efficace qu'augmenter la sensibilité.

La suite

La partie III s'achève : nous savons calculer la probabilité d'un événement.

Mais un gestionnaire ne veut pas seulement savoir *si* un défaut survient : il veut savoir **combien** il en survient, et **combien cela coûte**. Il faut donc attacher un nombre à chaque issue.

C'est la **variable aléatoire**, et c'est le chapitre 9.