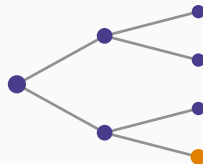


Probabilités

Chapitre 4 : Permutations et arrangements



Quand on ne remet pas

Les permutations

Les arrangements

Une application probabiliste

Ce qu'il faut retenir

Quand on ne remet pas

Une seule modification

Dans une liste, chaque position disposait des n objets. Ici, l'objet choisi **disparaît** : la position suivante n'en a plus que $n - 1$, puis $n - 2$.

Le produit ne s'écrit donc plus $n \times n \times \dots$ mais $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots$

La factorielle

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1, \quad \text{avec } 0! = 1$$

n	1	2	3	4	5	6	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	3 628 800

La factorielle explose

$10! \approx 3,6$ millions. $20! \approx 2,4 \times 10^{18}$. $70!$ dépasse le nombre d'atomes de l'univers observable.

Deux conséquences pratiques : d'une part, **il n'est jamais question d'énumérer**; d'autre part, il faut **simplifier avant de calculer**, jamais après.

La convention $0! = 1$

Elle n'est pas arbitraire. Il existe exactement **une** façon de ranger zéro objet : ne rien faire.

Cette convention rend toutes les formules du chapitre valables sans cas particulier — c'est sa seule justification, et elle suffit.

Les permutations

Ranger tous les objets

Permutation

Une **permutation** de n objets est un rangement de **tous** ces objets dans un ordre déterminé. Leur nombre est

$$P_n = n!$$

Le raisonnement, étape par étape

Cinq personnes, cinq sièges alignés.

La première place peut recevoir 5 personnes; la deuxième, 4; la troisième, 3; puis 2; puis 1.

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ dispositions}$$

L'ordonnancement d'atelier

Sept tâches à ordonner sur une même machine : $7! = 5\,040$ séquences possibles, chacune avec son coût.

Aucun logiciel n'explore les 5 040 pour sept tâches — mais pour vingt tâches, $20!$ dépasse 2×10^{18} .
C'est la raison d'être des méthodes d'optimisation combinatoire : l'énumération est définitivement hors de portée.

Les anagrammes, ou le piège des répétitions

Le mot GESTION a 7 lettres distinctes : $7! = 5\,040$ anagrammes.

Le mot GESTION**S** en aurait $8! = 40\,320$. Mais si une lettre était répétée, il faudrait diviser par la factorielle de son nombre de répétitions — sans quoi l'on compterait plusieurs fois le même mot.

Les arrangements

Arrangement

Un **arrangement** de k objets parmi n est une sélection **ordonnée** de k objets, sans répétition. Leur nombre est

$$A_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

La formule se lit comme le calcul

Il y a exactement k facteurs, en partant de n et en descendant.

Le quotient $n!/(n-k)!$ ne fait qu'écrire cela de façon compacte : le dénominateur **supprime** la queue du produit dont on n'a pas besoin.

Douze concurrents, trois places

$$A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1\,320$$

L'ordre compte : le podium (Ali, Brahim, Chakib) n'est pas le podium (Brahim, Ali, Chakib). Et personne ne peut occuper deux places : le tirage est sans remise.

Ne jamais calculer les factorielles séparément

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{9!} \quad \text{mais } 12! = 479\,001\,600$$

Écrire les deux factorielles est inutile et hors de portée d'une calculatrice dès $n = 70$. **Multipliez les k facteurs et arrêtez-vous** : c'est plus rapide, plus sûr, et cela ne déborde jamais.

Les bornes de la formule

$$A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! \qquad A_n^1 = n \qquad A_n^0 = 1$$

Une permutation est donc un arrangement de **tous** les objets : les permutations ne sont pas une notion distincte, mais un cas particulier.

Un tirage de contrôle fiscal

Sur 50 dossiers, on en tire 4 que l'on soumet à quatre inspecteurs différents. Chaque dossier va à un inspecteur nommé : l'ordre compte.

$$A_{50}^4 = 50 \times 49 \times 48 \times 47 = 5\,527\,200$$

Une application probabiliste

Vingt-trois personnes dans une salle

Quelle est la probabilité qu'au moins deux partagent leur date d'anniversaire ?

On passe par le contraire — « toutes les dates sont distinctes » — car il n'est constitué que d'un seul cas :

$$P(\text{tous distincts}) = \frac{A_{365}^{23}}{365^{23}} = \frac{365 \times 364 \times \dots \times 343}{365^{23}} \approx 0,493$$

$$P(\text{au moins deux coïncident}) \approx 0,507$$

Le problème des anniversaires (suite)

Pourquoi tout le monde se trompe

On compare instinctivement 23 à 365, et l'on conclut que c'est peu. Mais ce ne sont pas les personnes qu'il faut compter : ce sont les **paires**.

$$\frac{23 \times 22}{2} = 253 \text{ paires}$$

Deux cent cinquante-trois occasions de coïncidence, non pas vingt-trois. L'intuition compare les mauvaises choses.

Ce n'est pas une curiosité de salon

Le même calcul dimensionne les collisions dans un fichier informatique, les doublons dans une base clients, les codes attribués au hasard dans un système de gestion.

Les coïncidences sont beaucoup plus fréquentes que l'intuition ne le croit — et un gestionnaire qui les tient pour improbables sous-estime systématiquement ses risques d'erreur.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Sans remise, chaque tirage réduit le stock : le produit descend, $n(n-1)(n-2)\dots$
2. **Permutation** : ranger les n objets, $P_n = n!$
3. **Arrangement** : ranger k objets parmi n , $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, soit k facteurs descendants.
4. Une permutation est un arrangement avec $k = n$.
5. Passer par l'événement **contraire** est souvent le chemin le plus court.

La suite

Dans tout ce chapitre, l'ordre comptait. Or un comité de trois personnes, une main de cartes, un panier de titres n'ont pas d'ordre.

Le chapitre 5 traite ce dernier cas : les **combinaisons**. Elles sont, et de loin, l'outil le plus utilisé du cours.