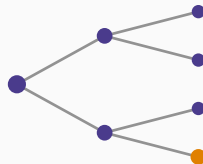


Probabilités

Chapitre 19 : Les lois dérivées et la carte des lois



Trois lois fabriquées

La carte du cours

Ce qu'il faut retenir

Trois lois fabriquées

Elles ne décrivent aucun phénomène économique

Aucune grandeur de gestion ne suit une loi du khi-deux. Aucun rendement ne suit une loi de Fisher.

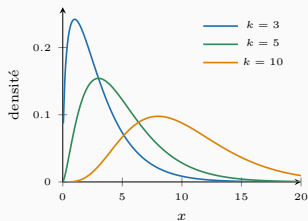
Ces lois ne servent qu'à une chose : **décrire le comportement d'une quantité calculée sur un échantillon** — une variance estimée, une moyenne estimée, un rapport de variances. C'est-à-dire à faire des tests.

Elles sont toutes filles de la normale

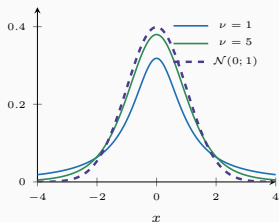
$$\chi_k^2 = Z_1^2 + \dots + Z_k^2 \quad T_\nu = \frac{Z}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}} \quad F(d_1; d_2) = \frac{\chi_{d_1}^2/d_1}{\chi_{d_2}^2/d_2}$$

où les Z_i sont des $\mathcal{N}(0; 1)$ indépendantes.

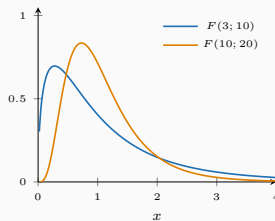
χ^2 : une *somme de carrés*



Student : la normale à queues lourdes



Fisher : un *rapport* de deux χ^2



Ces trois lois ne sont pas des lois de plus : ce sont des lois *fabriquées* à partir de la normale.

$$\chi_k^2 = Z_1^2 + \dots + Z_k^2 \quad T_\nu = \frac{Z}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}} \quad F(d_1; d_2) = \frac{\chi_{d_1}^2/d_1}{\chi_{d_2}^2/d_2}$$

Elles n'ont donc pas d'existence propre en économie : on les rencontre uniquement dans les *tests*, où l'on compare des variances (Fisher), une moyenne à petit échantillon (Student) ou des effectifs (khi-deux).

Student tend vers la normale quand ν grandit : au-delà de 30, la distinction ne se voit plus.

Loi du khi-deux

χ_k^2 est la loi d'une **somme de k carrés** de normales centrées réduites indépendantes. Le nombre k s'appelle le **degré de liberté**.

$$E(\chi_k^2) = k \quad V(\chi_k^2) = 2k$$

Deux conséquences visibles sur la courbe

Elle est **positive** : une somme de carrés ne peut pas être négative.

Elle est **dissymétrique à droite**, et d'autant moins que k grandit — encore le théorème central limite, puisqu'il s'agit d'une somme.

Deux tests que vous rencontrerez

Test d'indépendance : dans un tableau de contingence, on compare les effectifs observés aux effectifs attendus sous indépendance. La somme des écarts au carré suit un khi-deux.

Test d'adéquation : on vérifie qu'une distribution observée est compatible avec une loi théorique — par exemple qu'un dé n'est pas truqué.

Le mot « carré » est la clé

Chaque fois qu'un test additionne des **écarts au carré**, un khi-deux apparaît. C'est un signe qu'on peut reconnaître sans rien connaître du test.

Loi de Student

T_ν est le rapport d'une $\mathcal{N}(0; 1)$ à la racine d'un khi-deux réduit, indépendants.

Elle est symétrique, centrée, en cloche — mais à **queues plus épaisses** que la normale. Elle tend vers $\mathcal{N}(0; 1)$ quand $\nu \rightarrow \infty$.

D'où viennent ces queues épaisses

Quand on teste une moyenne, on ne connaît pas σ : on l'estime. Cette estimation est elle-même incertaine.

Student est la normale corrigée de l'incertitude sur σ . Ses queues plus lourdes ne sont rien d'autre que le prix de cette ignorance — et ce prix diminue à mesure que l'échantillon grandit.

La règle des trente

Au-delà de $\nu = 30$, Student et la normale sont indiscernables en pratique.

C'est l'origine de la fameuse distinction « petit échantillon / grand échantillon » — elle n'a pas d'autre fondement.

Une seconde vie en finance

Les rendements boursiers ont des queues bien plus épaisses que la normale : les krachs sont trop fréquents pour une loi de Gauss.

On les modélise donc souvent par une loi de Student à faible degré de liberté. **La loi inventée pour les petits échantillons sert aujourd'hui à mesurer le risque extrême.**

Loi de Fisher-Snedecor

$F(d_1; d_2)$ est le rapport de deux khi-deux, chacun divisé par son degré de liberté.

Elle est positive et dissymétrique à droite, avec deux degrés de liberté — un pour chaque variance comparée.

Où on la rencontre

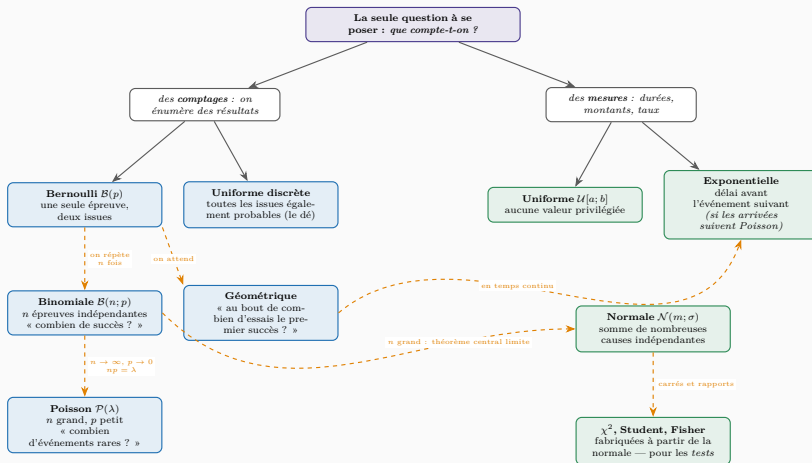
Elle compare **deux variances**. D'où sa présence systématique dans :

- l'analyse de la variance, qui compare la dispersion entre groupes à celle à l'intérieur des groupes;
- le test de significativité globale d'une régression, où le fameux « F de Fisher » compare la variance expliquée à la variance résiduelle.

Si un logiciel d'économétrie affiche un F , c'est de cette loi qu'il s'agit.

La carte du cours

Toutes les lois, et leurs liens



Il n'y a pas dix lois à apprendre : il y en a deux, et six conséquences. Tout part de l'épreuve à deux issues (Bernoulli) et de l'absence de préférence (uniforme). Les flèches pointillées sont des *passages à la limite* ou des *changements de question* — jamais des définitions nouvelles.

Devant un exercice, la bonne méthode n'est donc pas de chercher une formule, mais de répondre à trois questions : *que compte-t-on ? combien de fois ? les épreuves sont-elles indépendantes ?*

Trois questions devant un énoncé

1. **Que compte-t-on ?** Des occurrences dénombrables, ou une mesure continue ?
2. **Combien de fois ?** Une seule épreuve, un nombre fixé, ou une attente ?
3. **Les épreuves sont-elles indépendantes, et p constant ?**

Les réponses désignent une loi. Chercher directement une formule, sans passer par ces trois questions, est la source de la plupart des erreurs.

Deux lois seulement, et six conséquences

Tout part de l'épreuve à deux issues et de l'absence de préférence. Les flèches de la carte sont des **passages à la limite** ou des **changements de question**.

Il n'y a donc pas dix lois à mémoriser : il y a deux idées et six dérivations.

Le tableau de synthèse

Les lois discrètes			
Loi	Question	$E(X)$	$V(X)$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	succès ou échec	p	$p(1 - p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n; p)$	combien de succès sur n	np	$np(1 - p)$
Géométrique	rang du premier succès	$1/p$	$(1 - p)/p^2$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	combien d'événements rares	λ	λ

Le tableau de synthèse (suite)

Les lois continues

Loi	Question	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme $\mathcal{U}[a; b]$	aucune valeur privilégiée	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	délai avant l'événement	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Normale $\mathcal{N}(m; \sigma)$	somme de nombreuses causes	m	σ^2

Le conseil de révision

Ne mémorisez pas ce tableau ligne à ligne. Retenez la **question** de chaque loi; les deux moments se retrouvent ensuite, et se vérifient sur un cas simple.

Une formule oubliée se reconstruit; une loi mal identifiée ne se rattrape pas.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Khi-deux, Student et Fisher sont **fabriquées à partir de la normale**; elles ne décrivent aucun phénomène économique.
2. χ_k^2 est une **somme de carrés** : positive, dissymétrique, $E = k$ et $V = 2k$.
3. **Student** est la normale corrigée de l'incertitude sur σ ; ses queues sont plus épaisses, et elle rejoint la normale au-delà de $\nu = 30$.
4. **Fisher** est un rapport de variances : analyse de la variance et tests de régression.
5. La **carte des lois** se parcourt avec trois questions, jamais avec une formule.
6. Deux lois fondatrices — Bernoulli et uniforme — et six dérivations : c'est tout le programme.

La suite

Le cours a commencé en **observant** que la fréquence se stabilise. Il n'a jamais démontré pourquoi.

La septième et dernière partie le fait : la **loi des grands nombres** justifie l'estimation, le **théorème central limite** explique l'omniprésence de la cloche.