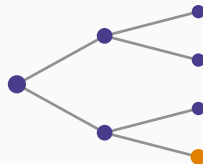


Probabilités

Chapitre 10 : Loi et fonction de répartition



La loi de probabilité

Un exemple de gestion complet

Ce qu'il faut retenir

La loi de probabilité

Le tableau statistique, revenu à l'identique

Loi de probabilité

La **loi** d'une variable aléatoire discrète X est la donnée de toutes ses valeurs possibles x_i et des probabilités correspondantes $p_i = P(X = x_i)$.

Elle vérifie, comme les fréquences :

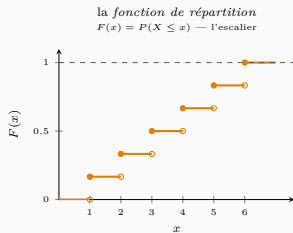
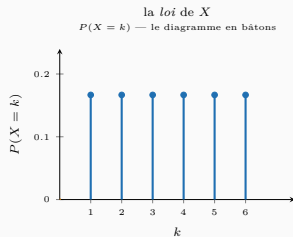
$$p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_i p_i = 1$$

La loi du dé

x_i	1	2	3	4	5	6	Total
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

C'est le tableau statistique du chapitre 1, avec p_i à la place de f_i .

Deux représentations



Le bâton donne la probabilité d'une valeur ; l'escalier cumule. **Ce sont les colonnes f_i et F_i du tableau statistique**, chapitre 3 de la descriptive : la hauteur de chaque marche est exactement la hauteur du bâton correspondant.

Fonction de répartition

$$F(x) = P(X \leq x)$$

C'est la **probabilité cumulée** : la transposition exacte de la colonne F_i du tableau statistique.

Comment on la construit

On additionne les probabilités de toutes les valeurs inférieures ou égales à x .

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

D'où sa forme en **escalier** : elle reste plate entre deux valeurs, puis saute de p_i à chaque valeur atteinte.
La hauteur du saut est la hauteur du bâton.

Quatre propriétés, toujours vraies

1. F est **croissante** — on ne fait qu'ajouter des probabilités.
2. $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$.
3. F est comprise entre 0 et 1.
4. F est continue à droite; ses sauts se produisent aux valeurs de X .

Deux objets, une seule information

De la loi on déduit F en cumulant; de F on retrouve la loi en prenant les hauteurs de sauts.

Connaître l'un, c'est connaître l'autre. On garde les deux parce que chacun répond plus vite à un type de question.

Le bon outil selon la question

Question	Outil	Calcul
$P(X = 3)$	la loi	p_3
$P(X \leq 3)$	la répartition	$F(3)$
$P(X > 3)$	la répartition	$1 - F(3)$
$P(2 < X \leq 5)$	la répartition	$F(5) - F(2)$

La ligne à retenir

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Toute probabilité d'intervalle est une différence de la fonction de répartition. C'est ce qui la rend indispensable, et c'est elle qu'on tabule — pour la loi normale comme pour les autres.

Sur le dé

$$P(X \leq 3) = \frac{3}{6} = 0,5 \quad \text{mais} \quad P(X < 3) = \frac{2}{6} \approx 0,333$$

L'écart vaut exactement $P(X = 3) = 1/6$.

Une précaution qui disparaîtra

En discret, $<$ et $\leq$ ne donnent pas le même résultat : une valeur isolée pèse.

En continu, ce sera l'inverse : $P(X = a) = 0$, et les deux écritures deviendront équivalentes. C'est l'un des rares points où le continu est **plus simple** que le discret.

Un exemple de gestion complet

La loi des sinistres

Un assureur observe, sur un contrat automobile, la loi suivante du nombre annuel de sinistres :

k	0	1	2	3	Total
$P(X = k)$	0,80	0,15	0,04	0,01	1
$F(k)$	0,80	0,95	0,99	1,00	

Ce que la ligne cumulée permet de lire

95 % des assurés déclarent au plus un sinistre : $F(1) = 0,95$.

Réciproquement, $P(X \geq 2) = 1 - F(1) = 0,05$: un contrat sur vingt coûte cher. **C'est cette queue de distribution qui détermine la prime, non la moyenne.**

Le quantile d'ordre alpha

Le **quantile** q_α est la plus petite valeur telle que $F(q_\alpha) \geq \alpha$.

C'est la lecture **inverse** de la fonction de répartition : on se donne une probabilité, on cherche la valeur.

La Value at Risk n'est rien d'autre

La VaR à 99 % d'un portefeuille est le quantile d'ordre 0,99 de la loi de ses pertes : la perte qui n'est dépassée qu'une fois sur cent.

Toute la réglementation prudentielle repose sur cette lecture inverse de F — apprise ici, sur un dé.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. La **loi** de X donne chaque valeur et sa probabilité; les p_i somment à 1.
2. C'est le **tableau statistique**, avec p_i au lieu de f_i .
3. La **fonction de répartition** $F(x) = P(X \leq x)$ cumule : c'est la colonne F_i .
4. Elle est croissante, en escalier, et va de 0 à 1.
5. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$: toute probabilité d'intervalle est une différence.
6. Lue à l'envers, F donne les **quantiles** — et la Value at Risk en est un.

La suite

La loi contient toute l'information, mais elle ne la résume pas : six probabilités pour un dé, deux cent une pour un portefeuille.

Il faut donc des **indicateurs**, comme en statistique descriptive. Le premier d'entre eux est celui que le chapitre 1 avait annoncé : l'**espérance mathématique**.