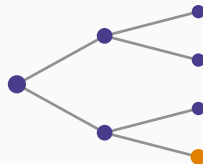


# Probabilités

## Chapitre 20 : La loi des grands nombres



La promesse du chapitre 1

La moyenne d'un échantillon

Le théorème

Les limites, à connaître absolument

L'application majeure

Ce qu'il faut retenir

## La promesse du chapitre 1

---

## Une dette contractée dès la première page

Le chapitre 1 définissait la probabilité comme la limite d'une fréquence. Il l'avait **observé** sur une figure, sans rien prouver.

Toute la construction du cours repose sur cette affirmation. Il est temps de la démontrer — et de mesurer sa portée exacte.

## La question

On répète une expérience  $n$  fois de façon indépendante, et l'on calcule la moyenne des résultats :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Que devient cette moyenne quand  $n$  grandit ?

## La moyenne d'un échantillon

---

### Espérance et variance de la moyenne

Si les  $X_i$  sont indépendantes, de même espérance  $m$  et de même écart-type  $\sigma$  :

$$E(\bar{X}_n) = m \qquad V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \sigma(\bar{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

### Le calcul, en deux lignes

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} [E(X_1) + \dots + E(X_n)] = \frac{nm}{n} = m$$

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} [V(X_1) + \dots + V(X_n)] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

La seconde ligne utilise  $V(aX) = a^2V(X)$  **et** l'indépendance, sans laquelle les variances ne s'additionneraient pas.

### Le premier : la moyenne vise juste

$E(\bar{X}_n) = m$ , quel que soit  $n$ . Même sur trois observations, la moyenne d'échantillon ne se trompe pas *en moyenne*.

On dit qu'elle est un estimateur **sans biais** de  $m$ . C'est le vocabulaire de la statistique inférentielle, et il commence ici.

### Le second : elle devient de plus en plus précise

$\sigma(\bar{X}_n) = \sigma/\sqrt{n}$  décroît vers zéro. La moyenne se resserre autour de  $m$ .

**Mais elle décroît en racine de  $n$** , non en  $n$ . Quadrupler la taille de l'échantillon ne divise l'erreur que par deux.

## Le coût de la précision

Un institut de sondage veut réduire de moitié sa marge d'erreur. Il doit **quadrupler** son échantillon, donc à peu près quadrupler son budget.

| Précision voulue | Taille nécessaire |
|------------------|-------------------|
| $\pm 3\%$        | $\approx 1\,100$  |
| $\pm 1,5\%$      | $\approx 4\,400$  |
| $\pm 0,75\%$     | $\approx 17\,800$ |

La précision est un bien à rendement fortement décroissant. C'est pourquoi les sondages s'arrêtent tous autour de mille personnes.

## Le théorème

---

## Loi des grands nombres

Soit  $X_1, X_2, \dots$  des variables **indépendantes**, de **même loi**, d'espérance  $m$  finie. Alors

$$\overline{X}_n \longrightarrow m \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

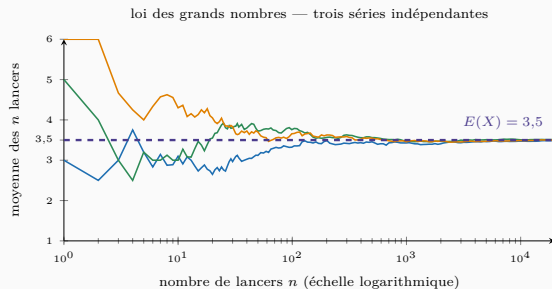
La moyenne empirique converge vers l'espérance.

## Pourquoi c'est vrai, en une phrase

La moyenne est centrée sur  $m$  et son écart-type  $\sigma/\sqrt{n}$  tend vers zéro.

Une variable centrée sur  $m$  dont la dispersion s'annule ne peut converger que vers  $m$ . Le théorème n'est rien de plus que cette observation, rendue rigoureuse.

# Ce que la figure montre



La boucle est bouclée.

Le cours a commencé en *observant* que la fréquence se stabilise. La loi des grands nombres le *démontre* :

$$\bar{X}_n \rightarrow E(X)$$

En prenant  $X$  égale à 1 si la face 6 sort et 0 sinon, la moyenne *devient* la fréquence et  $E(X)$  *devient* la probabilité.

**C'est le théorème qui autorise à estimer :** il justifie tout ce que fera la statistique inférentielle.

## Le cas de l'indicatrice

Prenons  $X_i = 1$  si l'événement  $A$  se produit à la  $i$ -ième répétition, 0 sinon. Alors

$$\overline{X}_n = \text{fréquence observée de } A \quad \text{et} \quad E(X_i) = P(A)$$

Le théorème dit donc : **la fréquence converge vers la probabilité.**

## La définition du chapitre 1 est désormais un théorème

Ce que le premier chapitre posait comme une définition empirique est maintenant une conséquence des axiomes.

L'édifice est cohérent : on est parti de la fréquence, on a construit un calcul, et le calcul redonne la fréquence.

Les limites, à connaître  
absolument

---

## Trois contresens fréquents

1. Il ne dit pas que la moyenne **atteint**  $m$  : elle s'en approche, sans jamais s'y fixer.
2. Il ne dit rien sur **la vitesse** — c'est le chapitre 21 qui la donne.
3. Il ne dit rien sur **la prochaine observation**. Absolument rien.

## L'erreur du joueur, une dernière fois

« Le rouge est sorti dix fois : le noir doit rattraper. » C'est faux.

La roulette n'a pas de mémoire. Le déséquilibre n'est pas **compensé** par des tirages contraires : il est **dilué** par le nombre. Dix rouges d'avance sur cent tours pèsent lourd ; sur un million, ils ne pèsent plus rien.

La loi des grands nombres n'annule pas les écarts, elle les rend négligeables.

## Il faut l'indépendance et l'identité de distribution

Sans indépendance, les variances ne s'additionnent plus et  $\sigma(\bar{X}_n)$  peut ne pas tendre vers zéro.

Sans loi commune, il n'y a pas de  $m$  vers lequel converger.

## Où l'hypothèse tombe, en pratique

- Un assureur qui couvre mille maisons **du même quartier** : une seule tempête les frappe toutes.
- Une banque dont les emprunteurs vivent de la même économie.
- Un sondage dont les répondants se recrutent dans le même réseau.

**Le nombre ne protège que si les risques sont vraiment indépendants.** C'est la raison d'être de la réassurance et de la diversification géographique.

## L'application majeure

---

## Pourquoi le métier est possible

Un assureur ignore totalement quelle maison brûlera. Mais il sait, avec une précision croissante, **combien** brûleront.

$$\sigma(\overline{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Sur cent contrats, la charge moyenne est très incertaine. Sur cent mille, elle est presque connue d'avance.

## La mutualisation, en une ligne

L'assurance ne supprime aucun risque individuel : elle le **remplace par une moyenne**, dont la loi des grands nombres garantit la stabilité.

C'est le seul théorème mathématique sur lequel repose une industrie entière.

Ce qu'il faut retenir

---

## Six points

1.  $E(\overline{X}_n) = m$  : la moyenne d'échantillon est **sans biais**.
2.  $\sigma(\overline{X}_n) = \sigma/\sqrt{n}$  : elle se resserre, mais **en racine de  $n$** .
3. Quadrupler l'échantillon divise l'erreur par deux : la précision coûte cher.
4. **Loi des grands nombres** :  $\overline{X}_n \rightarrow m$ ; pour une indicatrice, la fréquence tend vers la probabilité.
5. Elle ne dit **rien** sur la prochaine observation : les écarts sont dilués, non compensés.
6. Elle exige **indépendance** et loi commune; sans cela, le nombre ne protège pas.

## La suite

Nous savons *vers quoi* la moyenne converge. Nous ne savons pas *comment* elle est distribuée autour de cette limite.

Le chapitre 21 y répond — et la réponse est le résultat le plus surprenant de tout le cours.