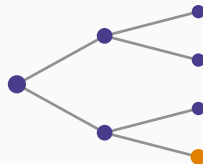


Probabilités

Chapitre 14 : Géométrie et Poisson



Attendre le premier succès

Les événements rares

Ce qu'il faut retenir

Attendre le premier succès

Une autre question sur la même épreuve

On change la question, pas l'expérience

La binomiale fixait n et comptait les succès. Ici on renverse : on fixe le **nombre de succès à un**, et l'on compte les épreuves nécessaires.

Même épreuve de Bernoulli, même paramètre p . Seule la question change — et la loi avec elle.

Loi géométrique

X suit une loi **géométrique** de paramètre p si elle compte le rang du **premier succès** dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes :

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

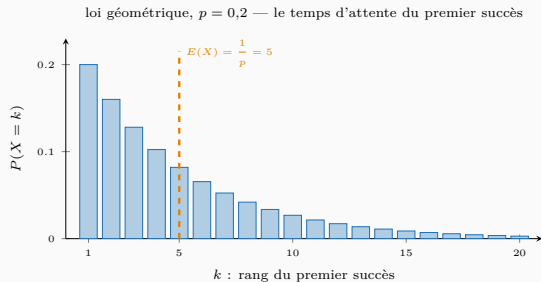
Un seul chemin convient

Pour que le premier succès soit au rang k , il faut $k - 1$ échecs **puis** un succès. Un seul chemin, donc aucun coefficient à compter – contrairement à la binomiale.

$$\underbrace{(1-p)^{k-1}}_{k-1 \text{ échecs}} \times \underbrace{p}_{\text{le succès}}$$

Ses caractéristiques

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} \quad P(X > k) = (1-p)^k$$



Le mode est toujours $k = 1$.

Le plus probable est de réussir du premier coup — même quand p est petit.

Absence de mémoire

$$P(X > m + k \mid X > m) = P(X > k).$$

Dix échecs de suite ne rendent pas le onzième essai plus prometteur. La machine ne « se souvient » de rien.

C'est l'erreur du joueur, corrigée par une ligne de calcul.

Le mode est toujours $k = 1$

La suite $(1 - p)^{k-1}p$ décroît dès le départ : **le rang le plus probable du premier succès est le premier essai**, même quand p vaut 0,05.

Et pourtant $E(X) = 1/p = 20$. Le plus probable et la moyenne sont très éloignés : c'est la marque d'une distribution fortement dissymétrique.

L'absence de mémoire

$$P(X > m + k \mid X > m) = P(X > k)$$

Après m échecs, la loi de l'attente restante est **identique** à celle du départ.

L'erreur du joueur

Une machine ne se souvient de rien

Dix échecs consécutifs ne rendent pas le onzième essai plus prometteur. La probabilité de succès reste p , inchangée.

Croire le contraire s'appelle *l'erreur du joueur*. Elle explique une grande part des comportements d'addiction au jeu, et elle se réfute par une ligne de calcul.

Une application commerciale

Un démarchage aboutit avec une probabilité $p = 0,08$ par appel.

$$E(X) = \frac{1}{0,08} = 12,5 \text{ appels par vente}$$

$$P(X > 30) = (0,92)^{30} = 0,082$$

Huit pour cent des commerciaux passeront plus de trente appels avant leur première vente — **sans être moins bons que les autres.**

Les événements rares

Quand n est immense et p minuscule

Combien de sinistres dans un portefeuille d'un million de contrats ? Combien de pannes dans une année ? Combien de clients à un guichet en une heure ?

Chaque « épreuve » est un instant, chaque probabilité est infime, et n n'est même pas connu. La binomiale devient inutilisable.

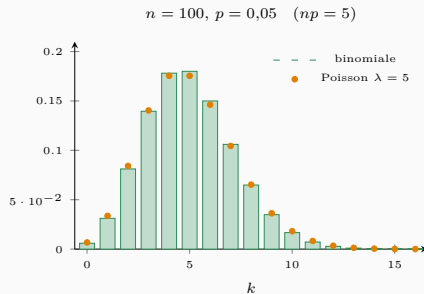
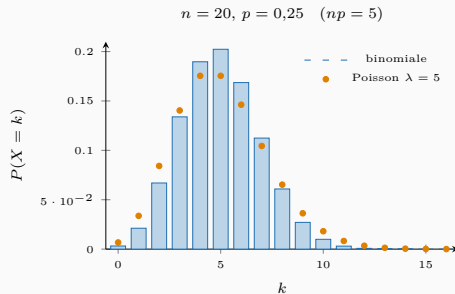
Loi de Poisson

X suit une loi de **Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ si

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

avec $E(X) = V(X) = \lambda$.

Poisson est la binomiale à la limite



Poisson est la binomiale poussée à la limite : n très grand, p très petit, le produit $np = \lambda$ restant fixe.
À gauche l'ajustement est déjà correct ; à droite les points recouvrent les barres. On remplace alors deux paramètres par un seul : λ .

D'où son nom : *loi des événements rares* — pannes, sinistres, arrivées de clients.

Le théorème

Si $n \rightarrow \infty$ et $p \rightarrow 0$ de sorte que $np \rightarrow \lambda$, alors

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \longrightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

En pratique, l'approximation est bonne dès que $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$.

Deux paramètres deviennent un seul

La binomiale exige n et p séparément. Poisson n'a besoin que de leur produit.

C'est décisif : un assureur ne connaît pas le nombre d'« épreuves » d'une année, mais il connaît parfaitement le **nombre moyen de sinistres**. Poisson ne demande rien d'autre.

Espérance égale variance

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

C'est une propriété caractéristique, et c'est un **test** : si les données montrent une variance nettement supérieure à la moyenne, la loi de Poisson est inadaptée.

La surdispersion, et ce qu'elle signale

Un assureur observe $\bar{x} = 0,26$ sinistre par contrat mais une variance de 0,61. Poisson est rejetée.

L'explication est presque toujours la même : **la population n'est pas homogène**. Il y a de bons et de mauvais conducteurs, et il faut segmenter. La statistique a détecté ce que le modèle avait supposé à tort.

Un guichet

Un guichet reçoit en moyenne $\lambda = 3$ clients par quart d'heure.

$$P(X = 0) = e^{-3} = 0,0498$$

$$P(X = 3) = e^{-3} \frac{3^3}{3!} = 0,224$$

$$P(X \geq 6) = 1 - \sum_{k=0}^5 e^{-3} \frac{3^k}{k!} = 1 - 0,916 = 0,084$$

Le dimensionnement d'un service

Un guichet sur douze connaîtra une affluence d'au moins six clients par quart d'heure.

C'est ce chiffre — non la moyenne de trois — qui détermine le nombre de guichets à ouvrir.

Dimensionner sur la moyenne garantit une file d'attente la moitié du temps.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. **Géométrique** : rang du premier succès, $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$, $E(X) = 1/p$.
2. Son mode est **toujours** $k = 1$, très loin de sa moyenne : distribution dissymétrique.
3. **Absence de mémoire** : les échecs passés n'améliorent pas les chances futures.
4. **Poisson** : $P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, la binomiale quand $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $np = \lambda$.
5. Elle ne demande **qu'un paramètre** : le nombre moyen d'événements.
6. $E(X) = V(X) = \lambda$; une variance supérieure signale une population hétérogène.

La suite

Ces trois lois — Bernoulli, binomiale, Poisson — suffisent à modéliser un portefeuille de crédits complet.

Le chapitre 15 le fait, de bout en bout : loi, espérance, écart-type, queue de distribution, provision et capital.