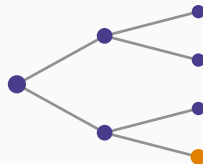


Probabilités

Chapitre 11 : L'espérance mathématique



La moyenne, sous un autre nom

Les propriétés

L'espérance comme critère de décision

Ce qu'il faut retenir

La moyenne, sous un autre nom

Espérance mathématique

$$\bar{x} = \sum_i f_i x_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(X) = \sum_i p_i x_i}$$

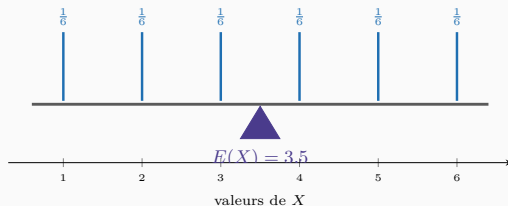
L'**espérance** de X est la moyenne de ses valeurs, pondérées par leurs probabilités.

Un nom malheureux

« Espérance » ne veut pas dire ce que l'on espère. Le mot vient des jeux de hasard du XVII^e siècle, où il désignait le gain moyen d'un joueur.

Lisez-le partout comme « **moyenne à long terme** » : c'est le sens exact, et il évite tous les contresens.

L'espérance est un point d'équilibre



L'espérance est un point d'équilibre.

Chaque valeur pèse le poids de sa probabilité. Le point où la barre tient en équilibre est

$$E(X) = \sum_k k P(X = k)$$

Sur le dé :

$$E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3,5$$

3,5 n'est pas une face du dé. Une espérance n'est pas une valeur possible : c'est un centre.

Trois espérances

Le dé : $E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5$.

Une indicatrice de défaut ($p = 0,04$) : $E(X) = 0(0,96) + 1(0,04) = 0,04$.

Les sinistres du chapitre 10 :

$$E(X) = 0(0,80) + 1(0,15) + 2(0,04) + 3(0,01) = 0,26$$

Deux remarques sur ces résultats

3,5 n'est pas une face; 0,26 n'est pas un nombre de sinistres. **Une espérance n'a pas à être une valeur possible.**

Elle mesure ce qui se produirait *en moyenne sur un très grand nombre de répétitions* — jamais ce qui se produira la prochaine fois.

Les propriétés

La propriété la plus utile du cours

$$E(aX + b) = a E(X) + b$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{toujours}$$

Le mot « toujours » est à souligner

L'espérance d'une somme est la somme des espérances **même si les variables sont dépendantes**.

Aucune hypothèse n'est requise.

C'est un cas unique : nous verrons au chapitre 12 que la variance, elle, exige l'indépendance. Retenez ce contraste, il évite la moitié des erreurs d'examen.

Le portefeuille de 200 crédits, calculé en une ligne

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{200}$, où X_i vaut 1 en cas de défaut du i -ième crédit.

$$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_{200}) = 200 \times 0,04 = 8$$

Mesurez l'économie

La loi de X compte 201 valeurs, chacune avec une probabilité à calculer par la formule binomiale. La somme $\sum_k k P(X = k)$ serait interminable.

La décomposition en indicatrices donne le résultat **sans connaître la loi**. C'est la raison d'être du chapitre 9.

Théorème du transfert

$$E[g(X)] = \sum_i p_i g(x_i)$$

On applique g aux **valeurs**, jamais aux probabilités.

Le piège à connaître

$$E[g(X)] \neq g[E(X)] \quad \text{en général}$$

Pour le dé : $E(X^2) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = 15,17$, tandis que $[E(X)]^2 = 3,5^2 = 12,25$.

L'écart de 2,92 n'est pas une erreur : c'est exactement la **variance**, que le chapitre 12 définira.

L'inégalité de Jensen, sans les mathématiques

Si g est convexe — un coût qui s'emballe, une pénalité de retard, une perte qui s'accélère — alors

$$E[g(X)] \geq g[E(X)]$$

Le coût moyen d'une demande fluctuante dépasse le coût de la demande moyenne. Un dimensionnement fondé sur la moyenne sous-estime donc systématiquement le coût réel.

Un cas concret

Une pénalité de retard croît comme le carré du retard. Un fournisseur livre avec 0 ou 4 jours de retard, une fois sur deux.

Retard moyen : 2 jours, soit une pénalité *apparente* de 4. Pénalité moyenne réelle : $\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(16) = 8$.
Le double.

L'espérance comme critère de décision

Trois qualifications

Un jeu de gain G est dit **équitable** si $E(G) = 0$, **favorable** si $E(G) > 0$, **défavorable** si $E(G) < 0$.

La roulette

Une roulette européenne compte **37** cases. Miser 1 dirham sur un numéro rapporte **35** dirhams.

$$E(G) = \frac{1}{37}(35) + \frac{36}{37}(-1) = \frac{35 - 36}{37} = -0,027$$

Le joueur perd en moyenne **2,7** centimes par dirham misé. **Le casino ne triche pas : il n'en a pas besoin.**

L'espérance ne dit pas tout

Deux placements de même espérance $E = 5\%$: l'un rapporte 5% à coup sûr, l'autre $+50\%$ ou -40% selon l'année.

Aucun gestionnaire ne les tient pour équivalents. L'espérance ignore complètement le **risque**.

C'est pourquoi le chapitre 12 existe

Décider sur la seule espérance conduirait à accepter n'importe quelle loterie de gain moyen positif, y compris ruineuse.

Il faut un second indicateur, mesurant la dispersion autour de $E(X)$. C'est la **variance** — et, en finance, la totalité de la théorie du portefeuille se joue dans le couple espérance-variance.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. $E(X) = \sum_i p_i x_i$: la moyenne arithmétique où f_i est devenu p_i .
2. Lire « espérance » comme **moyenne à long terme** ; ce n'est pas une valeur attendue au prochain tirage.
3. **Linéarité** : $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, sans aucune condition.
4. La décomposition en indicatrices donne $E(X)$ **sans calculer la loi**.
5. **Transfert** : $E[g(X)] = \sum_i p_i g(x_i)$, et en général $E[g(X)] \neq g[E(X)]$.
6. L'espérance ignore le risque : elle ne suffit à aucune décision.

La suite

Le chapitre 12 apporte le second indicateur — la **variance** — et montre, une dernière fois, que sa formule est celle de la statistique descriptive.

Il traitera aussi les **couples** de variables aléatoires : loi jointe, marges, conditionnelles et covariance.