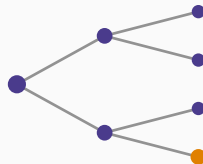


Probabilités

Chapitre 16 : Du discret au continu



Le passage

Les outils du continu

Ce qu'il faut retenir

Le passage

Certaines grandeurs ne se comptent pas

Un nombre de défauts prend les valeurs 0, 1, 2, ... On peut les lister et attribuer une probabilité à chacune.

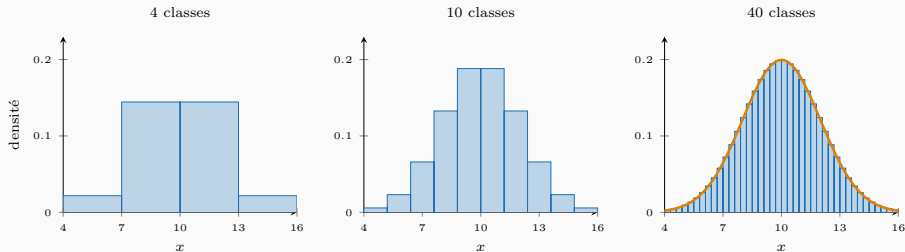
Une durée de vie, un montant, un taux de rendement ne se listent pas : entre 2,31 et 2,32 il y a une infinité de valeurs. Le tableau de loi devient impossible.

Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire est **continue** lorsqu'elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle.

Sa loi ne se donne plus par un tableau, mais par une **fonction de densité**.

Ce que fait l'affinement des classes



Le passage au continu n'est rien d'autre qu'un histogramme dont on affine les classes. L'escalier se lisse, et à la limite il devient une courbe : la *densité*.

Ce que l'on lit ne change pas de nature : c'était déjà une *aire* dans l'histogramme, ce reste une aire sous la courbe. Seule la somme $\sum$ devient une intégrale $\int$.

La densité, telle qu'on l'a déjà rencontrée

Le chapitre 5 de la statistique descriptive

Pour des classes d'amplitudes inégales, on ne portait pas l'effectif en hauteur mais la **densité** — l'effectif divisé par l'amplitude — afin que **l'aire** représente l'effectif.

C'est exactement la notion qui revient ici. Rien de nouveau : la même correction, poussée à la limite.

Fonction de densité

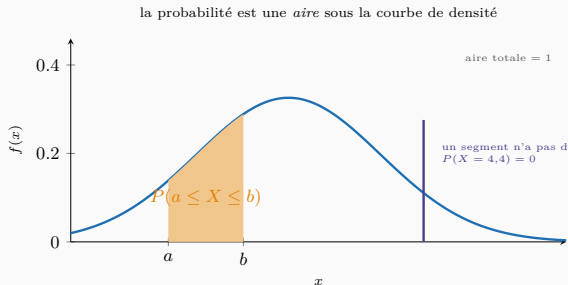
Une fonction f est une **densité de probabilité** si

$$f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1$$

et la probabilité se lit alors comme une aire :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \, dx$$

Ce que la densité n'est pas



Trois règles, et tout le continu suit

$f(x) \geq 0$ — une aire ne peut pas être négative.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ — l'équivalent de
 $\sum p_i = 1$.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$f(x)$ n'est pas une probabilité. Elle peut dépasser 1. Seule l'aire en est une.

Conséquence : $\leq$ ou $<$ ne change rien au résultat.

Ce qui change par rapport au discret

1. $f(x)$ **n'est pas** une probabilité : elle peut dépasser 1.
2. $P(X = a) = 0$ pour toute valeur a : un segment n'a pas d'aire.
3. Par conséquent $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$: les bornes ne comptent plus.

Le point 2 déroute, et à tort

« Probabilité nulle » ne veut pas dire « impossible ». La variable prend bien **une** valeur, et cette valeur avait une probabilité nulle avant le tirage.

L'analogie est géométrique : une droite tracée dans un carré a une aire nulle, elle existe pourtant. Demander la probabilité d'un point exact est simplement une question mal posée en continu.

Comment la question se pose correctement

Reformuler

Question mal posée

« La perte sera-t-elle de 1 000 000 ? »

« Le rendement vaudra-t-il 5 % ? »

Question utile

« Dépassera-t-elle 1 000 000 ? »

« Sera-t-il entre 4 % et 6 % ? »

C'est une bonne nouvelle pour un gestionnaire

Aucune décision ne porte jamais sur une valeur exacte. On décide sur des **seuils** et des **intervalles** — franchir un plafond, rester dans une fourchette.

Le continu impose donc de poser la question qu'on aurait de toute façon dû poser.

Les outils du continu

Elle ne change pas de définition

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

et réciproquement $f(x) = F'(x)$.

L'escalier est devenu une courbe

En discret, F montait par sauts, chaque saut valant p_i . En continu, elle monte **continûment** : il n'y a plus de saut, puisqu'aucune valeur ne pèse.

Elle reste croissante, part de 0, arrive à 1. Et la règle essentielle survit :

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

La somme devient une intégrale

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [E(X)]^2$$

Le dictionnaire est complet

Discret	Continu
$\sum_i$	$\int$
p_i	$f(x) dx$
$\sum_i p_i = 1$	$\int f(x) dx = 1$
$E(X) = \sum_i p_i x_i$	$E(X) = \int x f(x) dx$

La lecture inverse redevient simple

Le quantile q_α est la valeur telle que $F(q_\alpha) = \alpha$.

F étant continue et strictement croissante, cette équation a une solution **unique** : $q_\alpha = F^{-1}(\alpha)$.

La Value at Risk, enfin bien définie

En discret, le quantile à 99 % sautait de 14 à 15 défauts sans passer par les valeurs intermédiaires.

En continu, il vaut exactement ce qu'il doit valoir. **C'est pourquoi les modèles de risque de marché travaillent sur des lois continues** : la VaR y est un nombre, non un palier.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Une variable **continue** prend toutes les valeurs d'un intervalle; sa loi est une **densité**.
2. Le continu est un histogramme dont on a affiné les classes jusqu'à la limite.
3. $f(x) \geq 0$, $\int f = 1$, et $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f$: la probabilité est une **aire**.
4. $f(x)$ n'est pas une probabilité, et $P(X = a) = 0$: seules les questions par intervalle ont un sens.
5. $F(x) = P(X \leq x)$ devient continue; $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ reste valable.
6. $\sum$ devient $\int$: toutes les formules d'espérance et de variance sont conservées.

La suite

Le cadre est posé. Trois lois continues suffisent à couvrir l'essentiel des usages.

Le chapitre 17 traite les deux premières — l'**uniforme** et l'**exponentielle** — puis le chapitre 18 aborde celle qui domine tout : la loi **normale**.