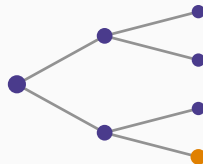


Probabilités

Chapitre 3 : Compter sans énumérer



Pourquoi compter

Le principe multiplicatif

Les listes

La somme des probabilités

Ce qu'il faut retenir

Pourquoi compter

Il est déjà dans la règle de Laplace

$$P = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Deux **nombres** au numérateur et au dénominateur. Tant que l'univers tient en six faces, on les compte à la main. Au-delà, il faut une méthode.

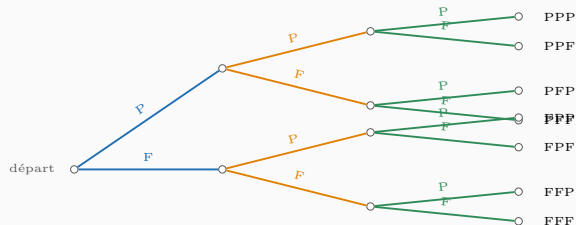
Trois questions qu'on ne peut pas résoudre en énumérant

1. Combien de codes de carte bancaire à quatre chiffres ?
2. Combien de podiums possibles avec douze concurrents ?
3. Combien de comités de trois personnes dans un conseil de dix ?

Les réponses sont 10 000, 1 320 et 120. Aucune ne s'obtient en écrivant la liste.

Le principe multiplicatif

L'arbre des possibles



Le principe multiplicatif

Si une opération se décompose en k étapes offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilités, le nombre total de résultats est

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

L'arbre le *montre* : chaque niveau multiplie le nombre de branches.

trois lancers d'une pièce : $2 \times 2 \times 2 = 8$ chemins, donc 8 résultats possibles.

Principe multiplicatif

Si une opération se décompose en k **étapes successives**, offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilités, alors le nombre total de résultats est

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

Pourquoi une multiplication

Chaque branche du premier niveau se **redivise** au second. Une branche devient n_2 branches, deux branches en deviennent $2n_2$, et ainsi de suite.

L'arbre ne démontre rien de plus que ceci : ajouter une étape multiplie le nombre de chemins.

Deux mots à surveiller

Mot de l'énoncé	Opération
« et », « puis », « ensuite »	on multiplie
« ou », « soit... soit » (cas exclusifs)	on additionne

Les deux à la suite

Un menu propose 3 entrées, 4 plats et 2 desserts : $3 \times 4 \times 2 = 24$ menus complets.

Si l'on peut prendre *soit* une entrée-plat, *soit* un plat-dessert : $3 \times 4 + 4 \times 2 = 20$ formules.

Les listes

Tirer avec remise, en tenant compte de l'ordre

Nombre de listes

Tirer k objets parmi n , **avec remise** et en tenant compte de l'**ordre**, donne

$$n^k$$

Chacune des k places peut recevoir n'importe lequel des n objets, indépendamment des autres.

Le code de carte bancaire

Quatre positions, dix chiffres disponibles à chaque fois :

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$$

La probabilité de trouver un code au premier essai est donc $1/10\,000 = 0,0001$.

Trois essais avant blocage

Une carte se bloque au troisième code faux. La probabilité qu'un fraudeur y parvienne est

$$\frac{3}{10\,000} = 0,0003$$

soit trois chances sur dix mille. **Ce chiffre n'est pas une opinion sur la sécurité des cartes : c'est un dénombrement.** C'est ainsi que se dimensionne une politique de sécurité.

Le même calcul, ailleurs

Plaques d'immatriculation, mots de passe, tirages successifs d'une pièce, réponses à un questionnaire à choix multiples : dès que chaque position est libre et que l'ordre compte, la réponse est n^k .

Pourquoi 36 et non 21

Deux dés lancés : $6^2 = 36$ couples. Si l'on ne distinguait pas les dés, on ne compterait que 21 résultats — mais ils ne seraient **pas équiprobables**.

Le couple (3, 5) et le couple (5, 3) sont deux issues distinctes. Le résultat « un 3 et un 5 » en vaut donc deux, tandis que « deux 3 » n'en vaut qu'une.

La leçon du chapitre 2, confirmée par le calcul

C'est bien le choix de l'univers qui décide. Prendre 36 couples équiprobables permet d'appliquer Laplace; prendre 21 paires ne le permet pas.

Le dénombrement est donc au service de la modélisation, jamais l'inverse.

La somme des probabilités

La somme de deux dés

Sur les 36 couples, comptons ceux qui donnent une somme de 7 :

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) – soit 6 cas.

$$P(\text{somme} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

Et pourquoi 7 est la meilleure mise

$$P(2) = \frac{1}{36} \quad P(7) = \frac{6}{36} \quad P(12) = \frac{1}{36}$$

La somme 7 est six fois plus probable que la somme 12. Un joueur qui l'ignore perd régulièrement – et c'est sur cette asymétrie que reposent la plupart des jeux de casino.

Ce qu'il faut retenir

Quatre points

1. Le dénombrement sert à alimenter la règle de Laplace : il **fournit les deux nombres** du rapport.
2. **Principe multiplicatif** : k étapes offrant $n_1, \dots, n_k$ possibilités donnent $n_1 \times \dots \times n_k$ résultats.
3. « Et » multiplie, « ou » additionne.
4. Tirage **avec remise et avec ordre** — une *liste* : n^k résultats.

La suite

Le cas n^k suppose que l'on peut reprendre plusieurs fois le même objet. Ce n'est pas toujours vrai : un même concurrent ne peut occuper deux places du podium.

Le chapitre 4 traite le tirage **sans remise** : arrangements et permutations.