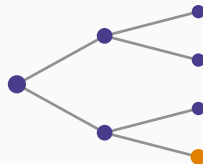


Probabilités

Chapitre 5 : Les combinaisons



Quand l'ordre ne compte pas

Les deux questions à se poser

Les propriétés

Les combinaisons au travail

Ce qu'il faut retenir

Quand l'ordre ne compte pas

Trois personnes parmi dix

On forme un comité de 3 membres dans un conseil de 10.

Le calcul du chapitre 4 donne $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$. Mais ce nombre est **faux** pour un comité.

Pourquoi il est faux

Le comité formé de {Amina, Brahim, Chakib} a été compté six fois : une fois pour chacun des $3! = 6$ ordres dans lesquels on pouvait les tirer.

Or un comité n'a pas d'ordre. Il faut donc **diviser par $3!$** :

$$\frac{720}{6} = 120$$

Combinaison

Une **combinaison** de k objets parmi n est une sélection **non ordonnée** et **sans répétition**. Leur nombre est

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

On lit « k parmi n » ; l'ancienne notation C_n^k désigne la même chose.

La formule se retient en une phrase

On compte d'abord les tirages **ordonnés**, puis on **efface l'ordre** en divisant par le nombre de façons de ranger les k objets choisis.

$$\text{combinaisons} = \frac{\text{arrangements}}{k!}$$

Les deux questions à se poser

La carte du dénombrement

Deux questions, et deux seulement, avant tout calcul de dénombrement.

On tire k objets parmi n	avec remise	sans remise
l'ordre compte	n^k	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
	<i>listes</i>	<i>arrangements</i>
l'ordre ne compte pas	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
	<i>combinaisons avec répétition</i>	<i>combinaisons</i>

1. L'ordre compte-t-il ?

Un code à quatre chiffres : oui, $1234 \neq 4321$.

Une main de cartes : non.

2. Peut-on répéter un objet ?

Un code : oui, 1111 est permis.

Un tirage de loterie : non.

Le cas $k = n$ sans remise et avec ordre donne

$A_n^n = n!$: les **permutations**.

Deux questions, dans cet ordre

1. **L'ordre compte-t-il?** Autrement dit : deux tirages contenant les mêmes objets rangés autrement sont-ils des résultats différents?
2. **Peut-on répéter un objet?** Autrement dit : le tirage se fait-il avec ou sans remise?

Les réponses désignent une case du tableau, et une seule.

Quatre énoncés, quatre cases

Situation	Ordre	Remise	Formule
Code à 4 chiffres	oui	oui	10^4
Podium de 12 coureurs	oui	non	A_{12}^3
Comité de 3 sur 10	non	non	$\binom{10}{3}$
5 boules de 3 couleurs	non	oui	$\binom{7}{5}$

Les propriétés

Les trois seules qui servent

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

La symétrie, sans calcul

Choisir 3 personnes parmi 10 pour former un comité, c'est exactement **choisir les 7 qui n'en seront pas**. Les deux opérations sont la même, donc les deux nombres sont égaux.

$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = 120$$

Utilisez toujours le plus petit des deux : $\binom{50}{48}$ se calcule comme $\binom{50}{2} = 1\,225$, de tête.

La relation de Pascal

Le triangle se construit par additions

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Le triangle de Pascal

<i>n</i>							
0				1			
1			1		1		
2		1		2		1	
3	1		3		3		1
4	1	4		6		4	1
5	1	5	10		10	5	1

La démonstration tient en une phrase

Isolons une personne, disons Amina. Un comité de k membres parmi n est de deux sortes, sans recouvrement :

- ceux **qui contiennent** Amina : il reste $k - 1$ places à pourvoir parmi les $n - 1$ autres ;
- ceux **qui ne la contiennent pas** : il reste k places à pourvoir parmi les $n - 1$ autres.

On additionne : c'est la formule. Aucun calcul n'a été nécessaire.

La formule du binôme, à titre de rappel

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Les coefficients du développement sont exactement les lignes du triangle. Cette formule reviendra au chapitre 13 : c'est elle qui garantit que les probabilités binomiales somment à 1.

Les combinaisons au travail

Un tirage de loterie

On tire 5 numéros parmi 49. Nombre de grilles possibles :

$$\binom{49}{5} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1\,906\,884$$

$$P(\text{grille gagnante}) = \frac{1}{1\,906\,884} \approx 5,2 \times 10^{-7}$$

Ce que ce nombre signifie

Une chance sur presque deux millions. En jouant une grille par semaine, il faudrait en moyenne **trente-six mille ans**.

Le dénombrement ne dit pas qu'il ne faut pas jouer : il dit exactement ce que l'on achète.

Le contrôle qualité

Un lot de 20 pièces contient 4 défectueuses. On en prélève 5 au hasard. Quelle est la probabilité d'en trouver exactement 2 défectueuses ?

Cas possibles : $\binom{20}{5} = 15\,504$.

Cas favorables : choisir 2 défectueuses parmi 4 **et** 3 bonnes parmi 16 :

$$\binom{4}{2} \times \binom{16}{3} = 6 \times 560 = 3\,360$$

$$P = \frac{3\,360}{15\,504} \approx 0,217$$

La structure à retenir

Le « et » du raisonnement — 2 défectueuses **et** 3 bonnes — est devenu une **multiplication**, conformément au chapitre 3.

C'est le schéma de tous les exercices de ce type : on découpe la population en catégories, on choisit dans chacune, on multiplie.

Un plan d'échantillonnage

Ce calcul est celui de la **norme d'échantillonnage** en contrôle de réception : combien de pièces prélever, et à partir de combien de défauts refuser le lot ?

La réponse se lit dans cette distribution — dite hypergéométrique — et l'ensemble de la qualité industrielle en dépend.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Une **combinaison** est une sélection sans ordre et sans répétition : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$
2. Elle s'obtient en divisant les arrangements par $k!$ — on **efface l'ordre**.
3. Deux questions suffisent devant tout énoncé : *l'ordre compte-t-il ? peut-on répéter ?*
4. **Symétrie** : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; calculez toujours le plus petit côté.
5. **Pascal** : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, qui se démontre en isolant un individu.
6. Un « et » entre catégories devient une **multiplication** de combinaisons.

La suite

Nous savons compter. Il reste à passer du comptage au **calcul** : les axiomes, les règles d'addition, le conditionnement.

C'est la troisième partie du cours, et le chapitre 6 l'ouvre.