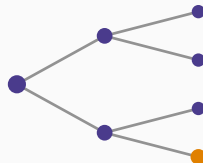


Probabilités

Chapitre 15 : Étude de cas — un portefeuille de crédits



Le problème

Étape 1 — Identifier la loi

Étape 2 — Les deux premiers moments

Étape 3 — La distribution complète

Étape 4 — Du quantile au capital

Étape 5 — Contrôler le modèle

Ce qu'il faut retenir

Le problème

Ce que fait ce chapitre

Rien de neuf n'y est introduit. Tout ce qui suit a été démontré aux chapitres 9 à 14.

Il s'agit de conduire un problème réel **du début à la fin**, et de montrer où chaque outil sert — parce que la difficulté d'un examen, comme d'un dossier professionnel, n'est jamais la formule mais l'enchaînement.

Les données

Une agence bancaire détient **200** crédits à la consommation, du même profil de risque.

- Probabilité de défaut annuelle de chaque crédit : $p = 0,04$.
- Perte en cas de défaut : **100 000** dirhams par crédit.
- Les défauts sont supposés **indépendants**.

Question : combien la banque doit-elle mettre de côté ?

Étape 1 — Identifier la loi

La vérification

1. Nombre d'épreuves **fixé**? Oui : $n = 200$ crédits.
2. Deux issues par épreuve? Oui : défaut ou non.
3. Indépendance et p constant? Oui, par hypothèse — et c'est la seule hypothèse discutable.

Donc $X \sim \mathcal{B}(200; 0,04)$, où X est le nombre de défauts de l'année.

Le choix de X est déjà une décision

On aurait pu prendre Y = la perte en dirhams. Mais $Y = 100\,000 X$: les deux variables ne diffèrent que d'un facteur.

Travailler sur le **nombre** de défauts est plus simple; on convertira en dirhams à la fin. Choisir la variable la plus maniable est un réflexe de méthode.

Étape 2 — Les deux premiers moments

Le calcul

$$E(X) = np = 200 \times 0,04 = 8 \text{ défauts}$$

$$V(X) = np(1 - p) = 200 \times 0,04 \times 0,96 = 7,68$$

$$\sigma(X) = \sqrt{7,68} = 2,77 \text{ défauts}$$

La traduction en dirhams

Perte moyenne : $8 \times 100\,000 = 800\,000$ dirhams. Écart-type de la perte :
 $2,77 \times 100\,000 = 277\,000$ dirhams.

La perte moyenne est le coût du risque : elle se facture dans le taux d'intérêt. L'écart-type, lui, ne se facture pas — il se couvre.

Perte attendue et perte inattendue

Notion	Grandeur	Traitement
Perte attendue	$E(X)$	provisionnée, incluse dans le prix
Perte inattendue	écarts autour de $E(X)$	couverte par des fonds propres

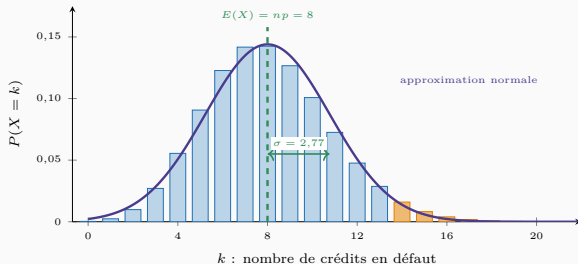
Pourquoi deux traitements différents

Une perte que l'on attend n'est pas un risque : c'est un coût. On la facture au client, comme n'importe quelle charge.

Le risque, c'est **l'écart** à cette moyenne. Il ne peut pas se facturer — on ne sait pas à qui — il doit donc être absorbé par le capital de la banque.

Étape 3 — La distribution complète

portefeuille de 200 crédits, probabilité de défaut $p = 0,04$



Chaque crédit est une épreuve de Bernoulli ; le portefeuille en répète 200 de façon indépendante. **La loi binomiale est le modèle du risque de crédit d'un portefeuille granulaire.**

Son écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ en est la mesure de risque élémentaire.

Ce que la banque veut savoir

Non pas « combien de défauts en moyenne » — elle le sait : 8.

Mais : *jusqu'où cela peut-il monter ?*

$$P(X \geq 14) = 0.031$$

Une fois tous les vingt ans environ.
C'est ce chiffre-là qui fixe le capital réglementaire.

La cloche superposée annonce le chapitre 21.

Quelques valeurs de la loi

Événement	Probabilité
Aucun défaut	0,0003
Exactement 8 défauts	0,1425
12 défauts ou plus	0,1075
14 défauts ou plus	0,0312
16 défauts ou plus	0,0070

Ce que la première ligne apprend

Une année sans aucun défaut n'arrive que trois fois sur dix mille. **Le zéro n'est pas un scénario.**

Un directeur d'agence qui promettrait « aucun impayé cette année » ne ferait pas une promesse ambitieuse : il ferait une promesse impossible.

Étape 4 — Du quantile au capital

Le quantile à 99 pour cent

On cherche le plus petit k tel que $F(k) \geq 0,99$:

$$F(14) = 0,9848 \quad F(15) = 0,9930$$

Le quantile à 99 % est donc 15 défauts, soit 1 500 000 dirhams de perte.

Le capital réglementaire

$$\text{capital} = \underbrace{1\,500\,000}_{\text{perte à 99 \%}} - \underbrace{800\,000}_{\text{perte attendue}} = 700\,000 \text{ dirhams}$$

La banque doit immobiliser 700 000 dirhams de fonds propres pour tenir une mauvaise année sur cent. C'est exactement la logique — et presque le calcul — des accords de Bâle.

Au niveau de 99,9 pour cent

$F(18) = 0,9995$: le quantile passe à 18 défauts, soit 1 800 000 dirhams.

$$\text{capital} = 1\,800\,000 - 800\,000 = 1\,000\,000 \text{ dirhams}$$

Trois défauts de plus coûtent 300 000 dirhams

Passer de « une mauvaise année sur cent » à « une sur mille » majore le capital de 43 %.

Le niveau de confiance n'est pas un détail technique : c'est un arbitrage entre sécurité et rentabilité, et c'est une décision de direction générale, pas de calcul.

Étape 5 — Contrôler le modèle

La vérification

$n = 200 \geq 30$ et $p = 0,04 \leq 0,1$: les conditions du chapitre 14 sont réunies, avec $\lambda = np = 8$.

$$P(X \geq 14) : \quad 0,0312 \text{ (binomiale)} \quad 0,0342 \text{ (Poisson)}$$

Un écart de trois millièmes, sans aucune information sur n ni p séparément.

Toujours vérifier un résultat par une seconde voie

Deux méthodes indépendantes qui convergent : le résultat est fiable.

C'est le contrôle le moins coûteux et le plus efficace qui soit — en probabilités comme en comptabilité.

Ce que l'hypothèse d'indépendance cache

Le point faible de toute l'étude

Les 200 emprunteurs vivent dans la même ville, travaillent dans la même économie. Une récession les frappe **ensemble**.

Avec une corrélation même faible entre défauts, σ passerait de 2,8 à plus de 12, et le capital nécessaire serait multiplié par quatre. L'espérance, elle, resterait à 8.

La conclusion du cas

Le chiffre fragile de cette étude n'est ni 8, ni 2,77, ni 700 000. C'est **l'hypothèse d'indépendance** qui les produit tous.

Un bon gestionnaire ne retient pas le résultat d'un modèle : il retient l'hypothèse dont il dépend le plus.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Identifier la loi, c'est répondre aux trois questions du chapitre 13.
2. $E(X) = np = 8$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = 2,77$.
3. **Perte attendue** : elle se provisionne et se facture. **Perte inattendue** : elle se couvre par du capital.
4. Le capital est un **quantile moins une moyenne** : $F^{-1}(0,99) - E(X)$.
5. L'approximation de Poisson confirme le résultat avec un seul paramètre.
6. Le résultat entier repose sur l'**indépendance** : c'est l'hypothèse à interroger en premier.

La suite

Le nombre de défauts se comptait. Un montant de perte, une durée, un taux de rendement ne se comptent pas : ils se **mesurent**, et prennent toutes les valeurs d'un intervalle.

La sixième partie franchit ce pas — et l'on verra que le passage au continu n'est rien d'autre qu'un histogramme dont on affine les classes.