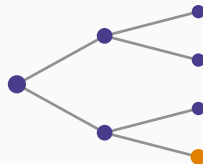


Probabilités

Chapitre 6 : Les axiomes et les premières règles



Ce qu'est une probabilité

La règle d'addition

La règle de Laplace, au travail

Ce qu'il faut retenir

Ce qu'est une probabilité

Trois axiomes, et tout le reste s'en déduit

Les axiomes de Kolmogorov

Une **probabilité** est une application P qui associe à chaque événement un nombre, et qui vérifie :

1. $P(A) \geq 0$ pour tout événement A ;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. si A et B sont **incompatibles**, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ce sont les propriétés des fréquences

Une fréquence est positive; les fréquences somment à 1; et l'effectif de deux modalités disjointes est la somme des effectifs.

Kolmogorov n'a rien inventé : il a **écrit les trois propriétés que la fréquence possède déjà**, et décrété qu'elles définissaient la probabilité. C'est cela, axiomatiser.

Cinq règles, toutes déduites des axiomes

Règle	Énoncé
Complémentaire	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Impossible	$P(\emptyset) = 0$
Encadrement	$0 \leq P(A) \leq 1$
Croissance	si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$
Différence	$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$

La règle du complémentaire est la plus rentable du cours

« Au moins un », « pas tous », « au moins deux » : ces énoncés recouvrent des dizaines de cas, alors que leur contraire n'en recouvre souvent qu'un.

$$P(\text{au moins un défaut}) = 1 - P(\text{aucun défaut})$$

Réflexe : dès qu'un énoncé contient « au moins », calculez le contraire.

Sur le portefeuille de crédits

Dix crédits indépendants, chacun de probabilité de défaut 0,04.

$$P(\text{au moins un défaut}) = 1 - (0,96)^{10} = 1 - 0,665 = 0,335$$

Un tiers des années comportent au moins un défaut. Le calcul direct aurait exigé dix termes.

La règle d'addition

Formule générale de l'addition

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Le troisième axiome n'en est que le cas particulier où $A \cap B = \emptyset$.

Pourquoi retrancher

En additionnant $P(A)$ et $P(B)$, on a compté **deux fois** ce qui appartient aux deux. On retire une fois le doublon.

C'est le principe d'inclusion-exclusion, et c'est exactement le raisonnement d'un comptable qui élimine un double emploi.

Une clientèle bancaire

60 % des clients détiennent un compte d'épargne (A), 35 % un crédit (B), et 20 % les deux.

$$P(A \cup B) = 0,60 + 0,35 - 0,20 = 0,75$$

Trois clients sur quatre détiennent au moins l'un des deux produits.

La lecture commerciale

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$: un quart de la clientèle ne détient **aucun** des deux produits.

C'est précisément la cible d'une campagne d'équipement — et ce chiffre, qu'aucune addition naïve ne donne, sort d'une seule ligne de calcul.

Ne jamais additionner sans vérifier l'incompatibilité

$$P(A) + P(B) = 0,95 \quad \text{alors que} \quad P(A \cup B) = 0,75$$

Une probabilité surestimée de vingt points. Et si les deux pourcentages avaient été 70 % et 50 %, l'addition aurait donné 1,20 — un résultat impossible qui aurait au moins alerté.

La somme dépasse 1 : c'est le signe qu'on a oublié l'intersection.

La règle de Laplace, au travail

Le cas des issues également probables

Si l'univers Ω compte N éventualités **équiprobables**, alors pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}$$

C'est ici que le dénombrement paie

Les trois chapitres précédents n'avaient pas d'autre but : fournir $\text{card}(A)$ et $\text{card}(\Omega)$.

Toute la difficulté d'un exercice de ce type est de choisir la bonne case du tableau du chapitre 5 — le calcul, lui, est une division.

Un jury tiré au sort

Un jury de 4 personnes est tiré parmi 7 femmes et 5 hommes. Quelle est la probabilité qu'il soit mixte ?

Cas possibles : $\binom{12}{4} = 495$.

Par le contraire : le jury n'est pas mixte s'il est entièrement féminin ou entièrement masculin :

$$\binom{7}{4} + \binom{5}{4} = 35 + 5 = 40$$

$$P(\text{mixte}) = 1 - \frac{40}{495} = 1 - 0,081 = 0,919$$

Trois réflexes ont servi

1. L'ordre ne compte pas dans un jury : **combinaisons**.
2. « Mixte » recouvre beaucoup de cas, « non mixte » seulement deux : **passer au contraire**.
3. « Entièrement féminin **ou** entièrement masculin » sont incompatibles : **on additionne** sans correction.

Ces trois réflexes suffisent à traiter la majorité des exercices de la partie III.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Une probabilité est **positive**, vaut 1 sur l'univers, et est **additive** sur les événements incompatibles.
2. Ces trois axiomes ne font que reprendre les propriétés des fréquences.
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$: le réflexe du **contraire**, dès qu'on lit « au moins ».
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: ne jamais additionner sans retirer l'intersection.
5. Sous équiprobabilité, tout se ramène à un **dénombrement**.

La suite

Toutes ces règles supposent une information fixe. Or l'information change : un test tombe, un signal apparaît, un client se manifeste.

Le chapitre 7 introduit l'outil qui traite l'arrivée d'une information : la **probabilité conditionnelle**. C'est le concept central de tout le cours.