

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 3 : Le cadre de la variance conditionnelle



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Conditionnel et inconditionnel

L'écriture standard

Le lien avec l'ARMA

Ce qu'il faut construire

Synthèse

Avant de commencer

Une contradiction apparente

La stationnarité au sens faible exige une variance **constante**. Les données exigent une variance **changeante**.

Il n'y a contradiction que si l'on confond deux objets. Ce chapitre les sépare.

Conditionnel et inconditionnel

Deux quantités distinctes

Variance inconditionnelle :

$$\sigma^2 = V(r_t) = E[(r_t - \mu)^2]$$

Une constante, calculée sur toute la série.

Variance conditionnelle :

$$h_t = V(r_t \mid \Omega_{t-1}) = E[(r_t - \mu)^2 \mid \Omega_{t-1}]$$

Une **variable aléatoire**, fonction de l'information disponible la veille.

Loi des espérances itérées

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(h_t).$$

La variance inconditionnelle est la **moyenne** des variances conditionnelles.

L'image à retenir

σ^2 est la température moyenne de l'année; h_t est la météo de demain. Les deux existent, elles ne se contredisent pas, et c'est la seconde qui intéresse celui qui doit décider aujourd'hui.

Pourquoi la stationnarité est sauve

Le processus reste stationnaire au sens faible tant que $\mathbb{E}(h_t)$ est finie et constante. Rien n'interdit à h_t de fluctuer autour de cette moyenne — c'est même exactement ce qu'on va modéliser.

L'écriture standard

Modèle à variance conditionnelle

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1).$$

Trois objets, trois rôles :

- $\mu_t = E(r_t \mid \Omega_{t-1})$: l'équation de moyenne, celle du cours ARMA;
- h_t : l'équation de variance, l'objet de ce cours;
- z_t : l'innovation standardisée, dont la loi fera l'objet du chapitre 10.

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1}) = \sqrt{h_t} \mathbb{E}(z_t) = 0$$

$$\mathbb{V}(\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1}) = h_t \mathbb{V}(z_t) = h_t$$

Le point technique à ne pas manquer

h_t doit être **mesurable par rapport à Ω_{t-1}** : entièrement déterminée par l'information de la veille. C'est ce qui permet de la sortir de l'espérance conditionnelle comme une constante.

Concrètement : h_t ne peut dépendre que de $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$ et de $h_{t-1}, h_{t-2}, \dots$ — jamais de ε_t .

Une séparation nette des rôles

h_t porte toute la **dynamique** : c'est elle qui monte et descend.

z_t porte toute la **forme** de la loi : symétrie, épaisseur des queues. Elle est i.i.d., donc sans mémoire.

Deux questions séparées, qu'on pourra traiter séparément — c'est ce qui rend le modèle maniable.

Le lien avec l'ARMA

Le modèle complet

$$\underbrace{A(L)r_t = \theta + B(L)\varepsilon_t}_{\text{équation de moyenne : cours ARMA}}, \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad \underbrace{h_t = f(\Omega_{t-1})}_{\text{équation de variance : ce cours}}$$

Ce que le cours ARMA a conclu

Sur données financières quotidiennes, l'équation de moyenne se réduit presque toujours à une **constante** : $r_t = \theta + \varepsilon_t$.

Ce n'est pas un appauvrissement du modèle, c'est un résultat empirique. Toute la structure est dans la variance.

Trois invariants

La **prévision ponctuelle** reste celle de l'ARMA : $\hat{r}_{T+1} = \hat{\theta}$.

Les **estimateurs de l'équation de moyenne** restent convergents, même si l'on ignore l'hétéroscédasticité.

Ce qui change, ce sont les **écarts-types**, les **intervalles** et les **quantiles** — c'est-à-dire tout ce qui touche au risque.

Ce qu'il faut construire

Quatre exigences

1. **Positivité** : $h_t > 0$ pour toute réalisation, sans exception.
2. **Mesurabilité** : h_t ne dépend que de Ω_{t-1} .
3. **Persistance** : un choc doit élever h_t durablement, pas une seule période.
4. **Stationnarité** : $E(h_t)$ doit exister et être finie.

La difficulté est dans la conjonction

Chaque exigence prise isolément est facile. C'est de les satisfaire **ensemble** qui a demandé du temps — et qui explique la forme, à première vue arbitraire, de l'équation ARCH.

Trois fausses bonnes idées

La variance glissante $h_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{t-i}^2$: simple, mais donne le même poids à un choc d'hier et à un choc d'il y a m jours, puis un poids nul le lendemain. Les sauts de h_t à l'entrée et à la sortie de la fenêtre sont artificiels.

Le lissage exponentiel $h_t = \lambda h_{t-1} + (1 - \lambda) \varepsilon_{t-1}^2$: bien meilleur — c'est la méthode RiskMetrics — mais λ est **imposé** (0,94), non estimé, et le modèle n'a pas de variance de long terme.

Une variance déterministe du temps : ne réagit pas aux chocs, donc manque tout le phénomène.

Ce que l'ARCH ajoute

Une forme paramétrique **estimable**, dont les coefficients se testent, qui possède une variance de long terme, et qui se prévoit à tout horizon. Le lissage exponentiel en apparaîtra au chapitre 13 comme un cas particulier contraint.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 3

- Variance **inconditionnelle** σ^2 : constante. Variance **conditionnelle** h_t : aléatoire, fonction de Ω_{t-1} .
- Elles sont liées par $\sigma^2 = E(h_t)$: aucune contradiction avec la stationnarité.
- Écriture standard : $r_t = \mu_t + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t$, z_t i.i.d. centrée réduite.
- h_t doit être mesurable par rapport à Ω_{t-1} : elle ne dépend jamais de ε_t .
- h_t porte la dynamique, z_t porte la forme de la loi.
- Cahier des charges : positivité, mesurabilité, persistance, stationnarité — **ensemble**.

Vers la partie II

Le cadre est posé. Il reste à proposer une forme pour h_t — et la plus simple qui satisfasse les quatre exigences est celle qu'Engle a écrite en 1982.