

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 17 : De la volatilité à la Value at Risk



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

La VaR conditionnelle

Le backtesting

Trois façons de calculer une VaR sous GARCH

L'expected shortfall

Ce que le cours suivant fera

Synthèse

Avant de commencer

Ce que ce chapitre établit

Une VaR est un **quantile de la densité prédictive**. Le cours a construit cette densité au chapitre 16. Il ne reste qu'à la lire au bon endroit — et à vérifier que la lecture est correcte.

La VaR conditionnelle

Value at Risk à l'horizon un jour

La perte que l'on ne dépassera qu'avec probabilité α :

$$P(r_{T+1} < -\text{VaR}_\alpha \mid \Omega_T) = \alpha.$$

Sa forme sous GARCH

$$\text{VaR}_{\alpha, T+1} = -\left[\hat{\mu} + \sqrt{\hat{h}_{T+1|T}} z_\alpha \right]$$

Trois ingrédients, trois chapitres

$\hat{\mu}$ vient de l'équation de moyenne — cours ARMA.

$\sqrt{\hat{h}_{T+1|T}}$ vient de l'équation de variance — chapitres 7 à 16.

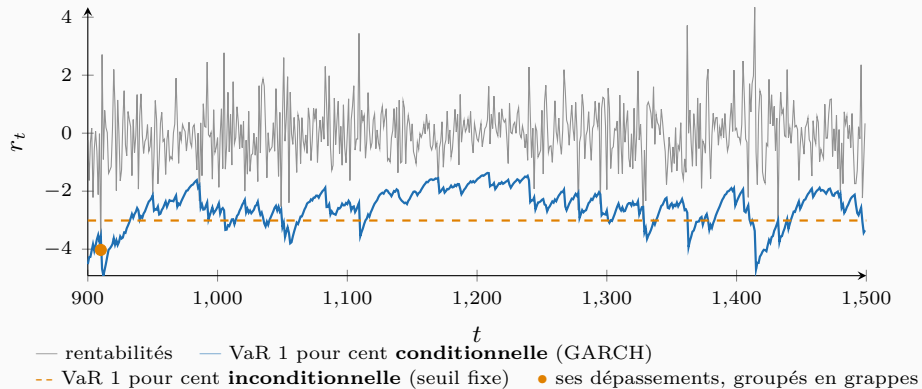
z_α vient de la loi des innovations — chapitre 10.

Deux mesures qui portent le même nom

Inconditionnelle : $\text{VaR} = -\hat{\mu} - \hat{\sigma} z_{\alpha}$, avec $\hat{\sigma}$ l'écart-type de tout l'échantillon. Un **seuil fixe**.

Conditionnelle : $\hat{\sigma}$ est remplacé par $\sqrt{\hat{h}_{T+1|T}}$. Un seuil qui **change chaque jour**.

Conditionnelle et inconditionnelle (suite)



Lecture de la figure

La ligne bleue suit les données : elle s'élargit quand le marché s'agite, se resserre quand il se calme. La ligne orange ne bouge jamais.

Les points marquent les dépassements du seuil fixe. Ils ne sont pas répartis au hasard : ils **se regroupent**, tous concentrés dans les périodes agitées.

Le backtesting

La variable de dépassement

$$d_t = \mathbf{1}\{r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t}\}.$$

Si la VaR est correcte, (d_t) est une suite de Bernoulli **indépendantes** de paramètre α .

Deux exigences, et non une

Couverture : la fréquence des dépassements doit valoir α .

Indépendance : les dépassements ne doivent pas se suivre.

Une mesure peut satisfaire la première et violer la seconde — et c'est précisément le défaut de la VaR inconditionnelle.

Couverture inconditionnelle (1995)

$$\text{LR}_{uc} = -2 \ln \frac{(1 - \alpha)^{n-n_1} \alpha^{n_1}}{(1 - \hat{\pi})^{n-n_1} \hat{\pi}^{n_1}} \sim \chi_1^2, \quad \hat{\pi} = \frac{n_1}{n}.$$

Sur les données du cours, à 1 pour cent

Mesure	Dépassements	Fréquence	LR_{uc}
VaR conditionnelle	25 / 2 500	1,00 %	0,00
VaR inconditionnelle	25 / 2 500	1,00 %	0,00

Les deux passent — et c'est le piège

Sur le seul comptage, les deux mesures sont irréfutables. Une banque qui s'arrêterait là conclurait que le seuil fixe suffit.

Le test de Christoffersen

Indépendance (1998)

On modélise (d_t) comme une chaîne de Markov d'ordre 1 et l'on teste

$$H_0 : \pi_{01} = \pi_{11},$$

où π_{ij} est la probabilité de dépasser sachant qu'on a dépassé ($j = 1$) ou non ($j = 0$) la veille. La statistique suit un χ_1^2 .

Le résultat, sur les mêmes données

Mesure	Paires consécutives	LR_{ind}	Verdict
VaR conditionnelle	1	1,38	acceptée
VaR inconditionnelle	4	16,22	rejetée

Valeur critique du χ_1^2 à 5 % : 3,84.

Le résultat central de ce chapitre

Même nombre de dépassements, verdict opposé. La VaR inconditionnelle échoue **exactement là où elle devrait tenir** : elle concentre ses erreurs dans les périodes de crise, c'est-à-dire au moment précis où le capital doit protéger.

Voilà à quoi sert un GARCH.

Couverture conditionnelle

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2_2.$$

C'est le test que la réglementation retient, parce qu'il vérifie les deux propriétés à la fois.

Trois façons de calculer une VaR sous GARCH

Le choix de z_α

Paramétrique : z_α est le quantile théorique de la loi supposée — normale, Student, Student asymétrique.

Simulation historique filtrée : z_α est le quantile **empirique** des résidus standardisés $\hat{z}_t$. Aucune hypothèse de loi.

Monte Carlo : simuler le modèle sur H jours et lire le quantile des trajectoires. Indispensable pour les horizons longs et les portefeuilles d'options.

Barone-Adesi, Giannopoulos et Vosper (1999)

1. Estimer le GARCH, extraire les résidus standardisés $\hat{z}_t$.
2. Prendre le quantile empirique $\hat{z}_{(\alpha)}$ de cet échantillon.
3. Poser $\text{VaR}_\alpha = -[\hat{\mu} + \sqrt{\hat{h}_{T+1|T}} \hat{z}_{(\alpha)}]$.

Pourquoi cette méthode est la meilleure des trois

Elle combine les deux forces : la **dynamique** vient du GARCH, la **forme de la loi** vient des données elles-mêmes — queues épaisses et asymétrie comprises, sans avoir à les paramétrer.

C'est elle qui produit les 25 dépassements parfaitement répartis du tableau précédent.

Le contraste avec la pratique courante

La simulation historique **non filtrée** prend directement le quantile des rentabilités passées. Elle capte les queues épaisses, mais ignore complètement la dynamique : c'est une VaR inconditionnelle.

Elle réagit avec retard aux crises, et met des mois à revenir à la normale quand elles s'achèvent. Le filtrage par $\sqrt{h_t}$ corrige exactement ce défaut.

L'expected shortfall

Expected shortfall (CVaR)

$$ES_{\alpha} = -E[r_{T+1} \mid r_{T+1} < -\text{VaR}_{\alpha}, \Omega_T].$$

La perte **moyenne** dans les cas où la VaR est dépassée.

Deux raisons de la préférer

La VaR ne dit rien de ce qui se passe **au-delà** du seuil : deux portefeuilles de même VaR peuvent avoir des pertes extrêmes très différentes.

Et la VaR n'est pas **sous-additive** : la VaR d'un portefeuille peut dépasser la somme des VaR de ses composantes, ce qui contredit l'idée même de diversification. L'ES, elle, est une mesure cohérente.

Bâle III

Depuis 2016, la réglementation bancaire a remplacé la VaR à 99 % par l'**expected shortfall à 97,5 %** pour le risque de marché.

Le calcul sous GARCH est identique : même $\hat{h}_{T+1|T}$, même loi de z , seule la fonctionnelle change.

Ce que le cours suivant fera

Le cours de Value at Risk

- **Chapitre 2** : VaR linéaire paramétrique — la formule de ce chapitre, appliquée à un portefeuille.
- **Chapitre 3** : simulation historique — et sa version filtrée, vue ici.
- **Chapitre 4** : VaR Monte Carlo — la simulation, avec les trajectoires du calcul stochastique.
- **Chapitre 6** : risque de modèle — ce qui se passe quand h_t est mal spécifiée.

Ce que vous y apportez

La compétence acquise ici est l'**équation de variance**. Tous les modèles de VaR en ont besoin, et la plupart des erreurs de mesure du risque viennent de là — non de la formule du quantile.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 17

- $\text{VaR}_{\alpha, T+1} = -[\hat{\mu} + \sqrt{\hat{h}_{T+1|T}} z_{\alpha}]$: trois ingrédients, trois parties du cursus.
- Le backtesting exige **deux** propriétés : couverture (Kupiec) et **indépendance** (Christoffersen).
- Sur les données du cours, les deux VaR ont 25 dépassements; seule la conditionnelle passe le test d'indépendance.
- La VaR inconditionnelle groupe ses échecs dans les crises — au pire moment.
- La **simulation historique filtrée** combine dynamique du GARCH et loi empirique : c'est la méthode de référence.
- Bâle III emploie l'**expected shortfall** à 97,5 %, qui se calcule de la même façon.

Vers les chapitres 18 et 19

Toute la démarche est établie. Il reste à l'exécuter, sur les données du cours, en R puis en Python.