

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 15 : La validation d'un modèle de volatilité



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Les tests d'absence de structure résiduelle

Les tests sur la loi

Le test d'asymétrie de Engle et Ng

Comparer des modèles

La procédure complète

Synthèse

Avant de commencer

La question de la validation

Un modèle GARCH est validé si les **résidus standardisés**

$$\hat{z}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}}$$

se comportent comme une suite i.i.d. de loi conforme à celle qu'on a supposée.

Le parallèle avec le cours ARMA

Là, on vérifiait que les résidus étaient un bruit blanc. Ici, on vérifie **deux** choses : que $\hat{z}_t$ est non corrélé — l'équation de moyenne tient — et que $\hat{z}_t^2$ l'est aussi — l'équation de variance tient.

C'est le second test qui est nouveau, et c'est le plus important.

Les tests d'absence de structure résiduelle

Ljung-Box sur $\hat{z}_t$

H_0 : les résidus standardisés ne sont pas autocorrélés. On souhaite **ne pas rejeter**.

Sur les données du cours

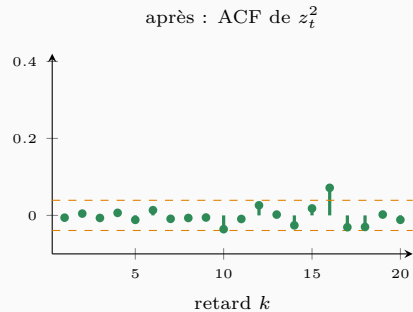
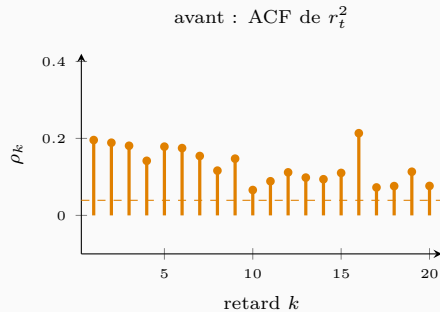
$$Q_{LB}(20) = 9,7 \quad \text{contre une valeur critique de } 31,4.$$

Non rejeté : l'équation de moyenne — ici une simple constante — suffit.

Ljung-Box sur $\hat{z}_t^2$

H_0 : les **carrés** des résidus standardisés ne sont pas autocorrélés. C'est le test de la spécification de h_t .

Sur les carrés : le test décisif (suite)



Avant et après, en deux nombres

Série	$Q_{LB}(20)$	Conclusion
r_t^2 (avant modélisation)	968,1	structure massive
$\hat{z}_t^2$ (après GARCH)	27,1	non rejeté

C'est le résultat central du cours

Le GARCH a absorbé la totalité de la dépendance des carrés. Ce qui reste est du bruit.

Le fait stylisé 4, qui résistait à l'ARMA, est entièrement expliqué par une équation à trois paramètres.

Un contrôle complémentaire

Réappliquer le test LM du chapitre 6 aux $\hat{z}_t$. S'il rejette encore, il reste de l'hétéroscédasticité conditionnelle : le modèle est sous-spécifié, il faut augmenter q ou passer à une forme asymétrique.

Les tests sur la loi

Jarque-Bera sur $\hat{z}_t$

Rejeté presque systématiquement, même après un bon GARCH.

Sur les données du cours

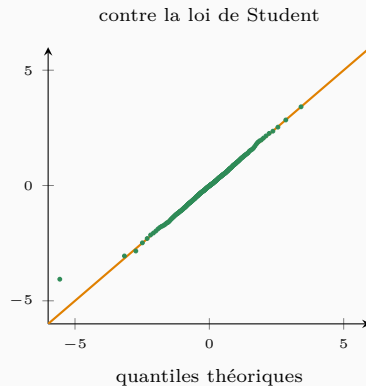
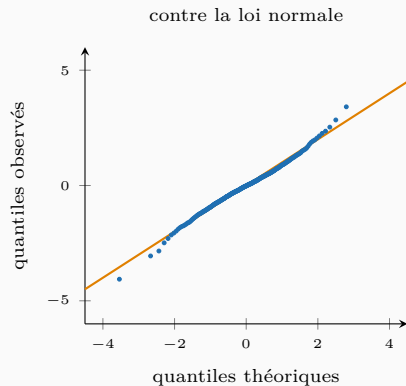
Kurtosis de $\hat{z}_t$: 4,66. Jarque-Bera : rejeté.

Comment lire ce rejet

Ce n'est **pas** un échec du modèle de variance. C'est le signe qu'il faut une loi à queues épaisses pour z_t — ce que le chapitre 10 a prescrit.

Après passage à la loi de Student, ce n'est plus la normalité qu'il faut tester, mais l'adéquation à la Student choisie.

Le diagramme quantile-quantile



Lecture

On porte les quantiles empiriques de $\hat{z}_t$ contre les quantiles théoriques de la loi supposée. Si le modèle est correct, les points s'alignent sur la première bissectrice.

L'outil le plus utile de tout le chapitre

Un test rend un verdict binaire; le diagramme montre **où** ça cloche. Un décrochage dans la queue gauche seulement signale une asymétrie de la loi — et appelle une Student asymétrique, non un changement de l'équation de variance.

Le test d'asymétrie de Engle et Ng

Le principe

Sign bias test (1993)

Régresser $\hat{z}_t^2$ sur des indicatrices du signe et de l'ampleur du choc précédent :

$$\hat{z}_t^2 = a_0 + a_1 S_{t-1}^- + a_2 S_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1} + a_3 S_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t,$$

avec $S_{t-1}^- = \mathbf{1}\{\hat{\varepsilon}_{t-1} < 0\}$ et $S^+ = 1 - S^-$.

Trois tests en un

Coefficient	Ce qu'il teste
a_1	<i>sign bias</i> : le signe du choc compte-t-il ?
a_2	<i>negative size bias</i> : l'ampleur des baisses est-elle mal traitée ?
a_3	<i>positive size bias</i> : celle des hausses ?

À quoi cela sert

Après un GARCH symétrique, ce test **détecte** l'effet de levier résiduel. S'il rejette, il faut passer au GJR ou à l'EGARCH — et le test dit lequel des trois aspects pose problème.

Comparer des modèles

Les mêmes qu'au cours ARMA

$$\text{AIC} = -2 \ln \hat{L} + 2k, \quad \text{BIC} = -2 \ln \hat{L} + k \ln T.$$

Le classement sur les données du cours

Modèle	k	$\ln \hat{L}$	BIC
GARCH normal	4	-3 543,2	7 117,8
GARCH Student	5	-3 491,0	7 021,1
GJR Student	6	-3 476,8	7 000,5

Une précaution de comparaison

Les modèles doivent être estimés sur **exactement le même échantillon** et avec la **même initialisation**.
Un GARCH(1,1) et un GARCH(2,2) qui ne démarrent pas à la même date ne sont pas comparables.

Le classement dans l'échantillon n'est pas le classement en prévision

Un modèle peut gagner sur le BIC et prévoir moins bien hors échantillon. La comparaison définitive se fait sur une **période réservée**, et c'est l'objet du chapitre suivant.

Sur des données réelles, on garde en général les 20 % de fin d'échantillon pour cette évaluation, sans jamais les utiliser à l'estimation.

La procédure complète

Le protocole de validation

1. Estimer et valider l'équation de **moyenne**.
2. Tester l'effet ARCH sur ses résidus.
3. Estimer un **GARCH(1,1) gaussien**, examiner le kurtosis de $\hat{z}_t$.
4. Passer à la loi de **Student**, lire $\hat{\nu}$.
5. Tester l'**asymétrie** (Engle-Ng); si rejet, passer au GJR.
6. Vérifier **Ljung-Box** sur $\hat{z}_t$ et sur $\hat{z}_t^2$.
7. Comparer les candidats par le **BIC**, puis hors échantillon.

Le critère d'arrêt

Des résidus standardisés dont ni les niveaux ni les carrés ne présentent de structure, et dont la loi est conforme au diagramme quantile-quantile. Rien de plus n'est exigible.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 15

- Le critère est double : $\hat{z}_t$ et $\hat{z}_t^2$ doivent être sans structure.
- Sur les données du cours : $Q_{LB}(20)$ passe de 968 sur r_t^2 à 27 sur $\hat{z}_t^2$.
- Jarque-Bera reste rejeté : c'est normal, et cela appelle une loi de Student, non un autre h_t .
- Le **diagramme quantile-quantile** montre où la loi est mal choisie, là où un test se contente de rejeter.
- Le test d'**Engle et Ng** détecte l'asymétrie résiduelle et oriente vers le GJR ou l'EGARCH.
- Le BIC classe dans l'échantillon ; seule une période réservée classe en prévision.

Vers le chapitre 16

Le modèle est validé. Il peut enfin servir à ce pour quoi il a été construit : prévoir la volatilité de demain, et de la semaine prochaine.