

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 5 : Propriétés statistiques de l'ARCH



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Les moments d'ordre un et deux

Le kurtosis

La nature de la mémoire

Simuler un ARCH

Synthèse

Avant de commencer

Quatre résultats, tous démontrés sur l'ARCH(1), tous valables plus généralement : l'absence d'autocorrélation, la stationnarité, le kurtosis, et la nature de la mémoire.

Les moments d'ordre un et deux

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1})] = \mathbb{E}[\sqrt{h_t} \mathbb{E}(z_t)] = 0.$$

La technique, employée partout dans ce chapitre

On conditionne d'abord — h_t devient alors une constante qu'on peut sortir — puis on prend l'espérance du résultat. C'est la **loi des espérances itérées**, et c'est le seul outil dont nous aurons besoin.

Pour $k \geq 1$:

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \text{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = \text{E}[\varepsilon_{t-k} \text{E}(\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1})] = 0.$$

Un ARCH est un bruit blanc

Le processus (ε_t) est un bruit blanc **faible** : non corrélé à tout retard.

Il n'est **pas** un bruit blanc fort : ε_t et ε_{t-1} sont manifestement dépendants, puisque le second détermine la variance du premier.

Le fait 1 est reproduit sans effort

Le modèle satisfait automatiquement l'absence d'autocorrélation des rentabilités — le premier fait stylisé. On n'a rien eu à imposer : c'est une conséquence de la structure.

En itérant l'équation $h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$ vers le passé :

$$h_t = \omega(1 + \alpha_1 z_{t-1}^2 + \alpha_1^2 z_{t-1}^2 z_{t-2}^2 + \dots)$$

En espérance, avec $E(z^2) = 1$:

$$E(h_t) = \omega \sum_{j \geq 0} \alpha_1^j = \frac{\omega}{1 - \alpha_1} \quad \text{si } \alpha_1 < 1.$$

Condition de stationnarité au second ordre

$$\boxed{0 \leq \alpha_1 < 1} \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}.$$

Le kurtosis

Sous $z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, donc $E(z^4) = 3$:

$$E(\varepsilon_t^4) = E[h_t^2 z_t^4] = 3 E(h_t^2).$$

Un calcul de même nature sur h_t^2 donne, si $3\alpha_1^2 < 1$:

Kurtosis d'un ARCH(1) à innovations gaussiennes

$$\kappa = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[E(\varepsilon_t^2)]^2} = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} > 3 \quad \text{dès que } \alpha_1 > 0.$$

Les queues épaisses n'ont pas été demandées

L'innovation z_t est **gaussienne**. Et pourtant le processus ε_t ne l'est pas : son kurtosis dépasse 3.

Le mélange de variances suffit à produire les queues épaisses. Le fait 2 découle du fait 3 — ce que le chapitre 2 annonçait, et qui se démontre ici en trois lignes.

Quelques valeurs

α_1	κ
0,1	3,09
0,3	4,52
0,5	18,0
$\geq 1/\sqrt{3} \approx 0,577$	infini

Ne pas les confondre

$\alpha_1 < 1$: variance finie (stationnarité au second ordre)

$3\alpha_1^2 < 1 \iff \alpha_1 < 0,577$: kurtosis fini (moment d'ordre 4)

La zone intermédiaire

Pour $0,577 < \alpha_1 < 1$, le processus est stationnaire mais son kurtosis est **infini**. La variance existe, la variance de la variance non.

Ce n'est pas une curiosité : sur données financières réelles, l'existence du moment d'ordre quatre est douteuse, et c'est l'une des raisons pour lesquelles les écarts-types d'estimation doivent être calculés de façon robuste — chapitre 14.

La nature de la mémoire

Résultat

Pour un ARCH(1),

$$\text{Corr}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2) = \alpha_1^k.$$

Une décroissance géométrique — la signature d'un AR(1)

C'est exactement le résultat du cours ARMA pour un AR(1) : $\rho_k = \alpha^k$.

Le carré du choc se comporte comme un processus autorégressif d'ordre 1. Le chapitre 9 montrera que ce n'est pas une analogie, mais une identité.

Un dilemme sans issue

Pour reproduire une ACF encore significative au retard 20, il faut α_1^{20} non négligeable, donc α_1 proche de 0,9.

Mais $\alpha_1 = 0,9 > 0,577$: le kurtosis devient infini, et le modèle produit des trajectoires bien plus extrêmes que les données.

Le diagnostic

L'ARCH(1) ne peut pas être à la fois assez persistant et assez sage. Augmenter q répartit la charge, mais impose d'estimer beaucoup de paramètres, tous contraints positifs.

Le GARCH résoudra ce dilemme en séparant deux choses que l'ARCH confond : la **réaction** au choc et la **persistance** de la variance.

Simuler un ARCH

En quatre lignes

1. Initialiser $h_1 = \omega / (1 - \alpha_1)$, la variance de long terme.
2. Tirer z_t dans la loi choisie.
3. Poser $\varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t$.
4. Calculer $h_{t+1} = \omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2$, puis revenir en 2.

Deux précautions

Jeter les premières centaines d'observations — le *burn-in* — pour effacer l'effet de l'initialisation.

Et vérifier que la variance empirique de la série simulée est proche de $\omega / (1 - \alpha_1)$: c'est le contrôle qui détecte le plus vite une erreur de programmation.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 5

- Un ARCH est un bruit blanc **faible** : $E(\varepsilon_t) = 0$ et $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$.
- Stationnarité au second ordre si $\alpha_1 < 1$; alors $\sigma^2 = \omega/(1 - \alpha_1)$.
- **Kurtosis** = $3(1 - \alpha_1^2)/(1 - 3\alpha_1^2) > 3$ même avec des innovations gaussiennes.
- Deux conditions distinctes : $\alpha_1 < 1$ pour la variance, $\alpha_1 < 0,577$ pour le kurtosis.
- $\text{Corr}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2) = \alpha_1^k$: décroissance géométrique, comme un AR(1).
- Dilemme de l'ARCH : la persistance nécessaire rend le kurtosis infini.

Vers le chapitre 6

Avant de perfectionner le modèle, il faut savoir **détecter** un effet ARCH sur données réelles, et choisir son ordre. C'est l'étape d'identification, transposée à la variance.