

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 16 : La prévision de volatilité



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

La prévision à un pas

La prévision à plusieurs pas

La volatilité sur plusieurs jours

Évaluer une prévision de volatilité

La prévision de densité

Synthèse

Avant de commencer

Deux prévisions, deux destins

Le cours ARMA prévoyait la **moyenne** : la prévision devenait plate en deux ou trois pas, et l'exercice avait peu d'intérêt sur données financières.

Ici on prévoit la **variance**. Elle est fortement persistante, donc réellement prévisible sur plusieurs semaines. C'est la partie utile de la prévision financière.

La prévision à un pas

Un pas en avant

$$\hat{h}_{T+1|T} = \omega + \alpha_1 \varepsilon_T^2 + \beta_1 h_T.$$

Aucune incertitude sur cette valeur

ε_T et h_T sont **connus** à la date T . La prévision à un pas de la variance conditionnelle est donc exacte — ce n'est pas une estimation, c'est un calcul.

C'est une différence remarquable avec la prévision de la moyenne, où l'on ignore tout du choc à venir.

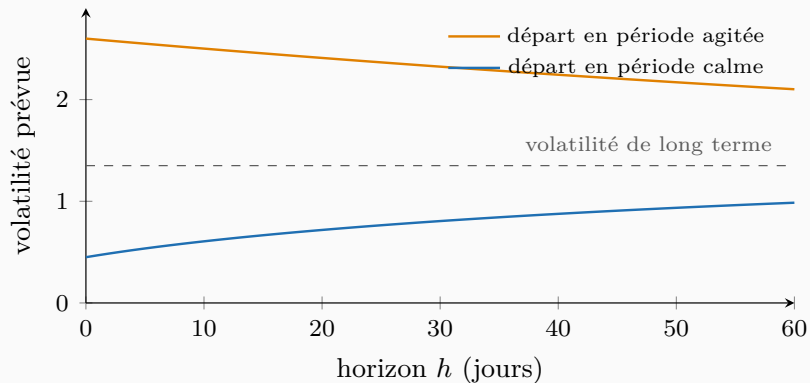
La prévision à plusieurs pas

Pour $h \geq 2$, on remplace ε_{T+h-1}^2 par son espérance conditionnelle, qui vaut $\hat{h}_{T+h-1|T}$:

$$\hat{h}_{T+h|T} = \omega + (\alpha_1 + \beta_1) \hat{h}_{T+h-1|T}.$$

La formule fermée

$$\boxed{\hat{h}_{T+h|T} = \sigma^2 + \pi^{h-1} (\hat{h}_{T+1|T} - \sigma^2)}, \quad \pi = \alpha_1 + \beta_1.$$



Trois enseignements

La prévision **converge vers la variance de long terme** σ^2 , à la vitesse π .

Elle converge **par le haut** si l'on part d'une période agitée, **par le bas** si l'on part d'une période calme.

Et la convergence est **lente** : avec $\pi = 0,99$, il faut plus de deux mois pour combler la moitié de l'écart.

Ce que cela vaut en gestion

C'est là toute l'utilité opérationnelle du modèle. Un gérant qui sait que la volatilité restera élevée trois mois ajuste ses positions autrement que s'il la croyait revenue à la normale dès demain.

Prévision d'un GJR

Si z_t est de loi symétrique, $P(\varepsilon_{T+k} < 0) = 1/2$, donc

$$\hat{h}_{T+h|T} = \omega + \left(\alpha_1 + \frac{\gamma}{2} + \beta_1 \right) \hat{h}_{T+h-1|T}.$$

L'asymétrie s'efface à l'horizon

Au premier pas, le signe du dernier choc est connu et compte pleinement. Au-delà, on ignore le signe des chocs futurs : seule sa probabilité intervient, et elle vaut un demi.

L'effet de levier améliore donc surtout la prévision **à court terme**.

La volatilité sur plusieurs jours

Variance d'une rentabilité cumulée

Comme les ε_t sont non corrélés, la variance de la somme est la somme des variances :

$$V\left(\sum_{k=1}^H \varepsilon_{T+k} \mid \Omega_T\right) = \sum_{k=1}^H \hat{h}_{T+k|T}.$$

Pourquoi c'est la formule qui compte pour la réglementation

Bâle exige une VaR à **dix jours**. C'est exactement cette somme qu'il faut calculer, et non la variance à un jour multipliée par 10.

La règle de la racine carrée du temps

Ce que la pratique fait souvent

$$\sigma_{H \text{ jours}} \approx \sqrt{H} \times \sigma_{1 \text{ jour}}.$$

Elle n'est exacte que si la volatilité est constante

Sous GARCH, la somme $\sum_k \hat{h}_{T+k|T}$ n'est **pas** égale à $H \hat{h}_{T+1|T}$, sauf si $\hat{h}_{T+1|T} = \sigma^2$.

L'erreur, chiffrée

En période **agitée** ($\hat{h}_{T+1} > \sigma^2$), la règle **surestime** le risque à dix jours : elle propage la volatilité élevée sans tenir compte du retour à la moyenne.

En période **calme**, elle le **sous-estime** — et c'est le cas dangereux, celui qui précède les crises.

Évaluer une prévision de volatilité

La cible est inobservable

On prévoit h_{T+1} , mais h_{T+1} ne s'observe jamais. On ne dispose que de ε_{T+1}^2 , qui en est un estimateur **sans biais** mais extrêmement bruité.

À quel point bruité

Sous normalité, $V(\varepsilon_t^2 \mid \Omega_{t-1}) = 2h_t^2$. L'écart-type du « signal » vaut donc $\sqrt{2}$ fois le signal lui-même.

La conséquence, longtemps mal comprise

Les premières évaluations trouvaient un R^2 de 5 à 10 % pour la régression de ε_{t+1}^2 sur $\hat{h}_{t+1}$, et concluaient à l'inutilité des GARCH.

Andersen et Bollerslev (1998) ont montré que ce plafond est **mécanique** : même avec le vrai modèle, le R^2 ne peut pas dépasser environ $1/\kappa_z$. Le GARCH prévoit bien ; c'est la mesure qui était mauvaise.

Trois façons de faire mieux

Volatilité réalisée : $RV_t = \sum_i r_{t,i}^2$ sur les rendements intrajournaliers. Beaucoup moins bruitée — mais exige des données haute fréquence.

Fonctions de perte robustes : QLIKE, $\ln \hat{h} + \varepsilon^2 / \hat{h}$, moins sensible aux valeurs extrêmes que l'erreur quadratique.

Évaluation indirecte : juger le modèle sur la qualité de la VaR qu'il produit — c'est l'objet du chapitre suivant, et c'est la voie la plus pertinente en gestion des risques.

La prévision de densité

La densité prédictive complète

$$r_{T+1} \mid \Omega_T \sim \mu + \sqrt{\hat{h}_{T+1|T}} \times \mathcal{L}_z,$$

où $\mathcal{L}_z$ est la loi choisie au chapitre 10.

Le cours entier tient dans cette ligne

$\hat{h}_{T+1|T}$ vient de l'équation de variance : elle donne l'**échelle**.

$\mathcal{L}_z$ vient de la loi des innovations : elle donne la **forme**.

Le produit des deux est la loi complète de la rentabilité de demain. Tout ce qui suit — quantiles, VaR, prix d'options — s'en déduit.

La formule qui ouvre le chapitre suivant

$$q_{\alpha, T+1} = \mu + \sqrt{\hat{h}_{T+1|T}} \times z_{\alpha},$$

où z_{α} est le quantile d'ordre α de la loi de z .

Ce que chaque facteur apporte

$\sqrt{\hat{h}_{T+1|T}}$ **bouge tous les jours** : c'est ce qui rend la mesure de risque conditionnelle.

z_{α} est **constant** : c'est ce qui décide de la sévérité du seuil. Le chapitre 10 a montré qu'il passe de $-2,33$ à $-3,09$ selon la loi retenue.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 16

- À un pas, $\hat{h}_{T+1|T}$ se calcule **exactement** : tous ses arguments sont connus.
- À h pas : $\hat{h}_{T+h|T} = \sigma^2 + \pi^{h-1}(\hat{h}_{T+1|T} - \sigma^2)$ – convergence vers σ^2 à la vitesse π .
- Sur H jours, la variance est la **somme** des variances prévues, non H fois celle du premier jour.
- La règle de la racine carrée du temps surestime en période agitée et **sous-estime en période calme**.
- La cible h_{t+1} est inobservable ; ε_{t+1}^2 en est un estimateur très bruité, d'où un R^2 mécaniquement faible.
- Densité prédictive : $\hat{h}$ donne l'échelle, la loi de z donne la forme.

Vers le chapitre 17

Il reste à transformer cette prévision en un nombre exploitable — celui que la réglementation exige, et sur lequel se calcule le capital d'une banque.