

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 8 : Stationnarité, persistance et variance de long terme



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

La condition de stationnarité

La demi-vie d'un choc

L'existence des moments

Le GARCH(1,1) dans le plan des paramètres

Synthèse

Avant de commencer

La persistance

$$\pi = \alpha_1 + \beta_1$$

Une seule quantité, dont dépendent la stationnarité, la variance de long terme, la vitesse d'oubli des chocs et la forme des prévisions.

La condition de stationnarité

Stationnarité au second ordre d'un GARCH(1,1)

Le processus admet une variance inconditionnelle finie si et seulement si

$$\pi = \alpha_1 + \beta_1 < 1.$$

Alors

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}.$$

En prenant l'espérance de l'équation GARCH et en utilisant $E(\varepsilon_{t-1}^2) = E(h_{t-1}) = \sigma^2$:

$$\sigma^2 = \omega + \alpha_1 \sigma^2 + \beta_1 \sigma^2 = \omega + \pi \sigma^2.$$

D'où $\sigma^2(1 - \pi) = \omega$, et le résultat — à condition que $\pi < 1$, faute de quoi σ^2 serait négatif ou infini.

Le parallèle avec l'AR(1)

C'est le même calcul, la même conclusion et la même formule que $\mu = \theta / (1 - \alpha)$ pour un AR(1). Le GARCH est un modèle autorégressif — sur la variance.

Quatre régimes

π	Comportement
$\pi = 0$	variance constante : pas d'effet ARCH
$\pi < 1$	stationnaire, retour à σ^2
$\pi = 1$	IGARCH : les chocs ne s'oublient jamais
$\pi > 1$	explosif, non stationnaire

La demi-vie d'un choc

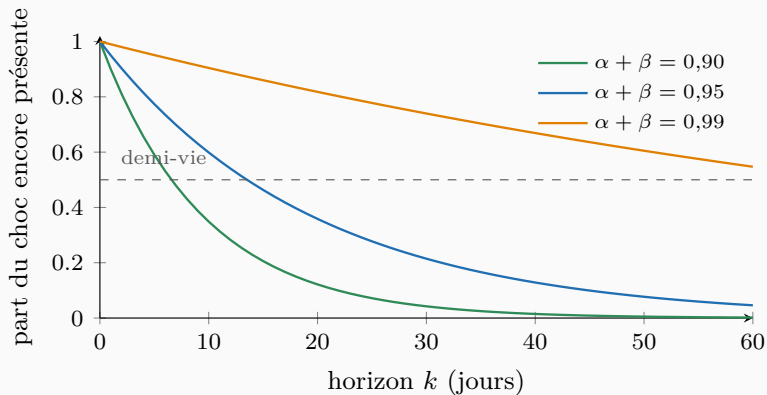
Un choc élève h_t ; l'écart à la moyenne se transmet ensuite au taux π par période :

$$E(h_{t+k} - \sigma^2 \mid \Omega_t) = \pi^k (h_t - \sigma^2).$$

Demi-vie

Le nombre de périodes au bout duquel la moitié de l'effet a disparu :

$$k_{1/2} = \frac{\ln 0,5}{\ln \pi}.$$



La sensibilité est extrême près de 1

La sensibilité est extrême près de 1

π	demi-vie
0,80	3 jours
0,90	7 jours
0,95	14 jours
0,98	34 jours
0,99	69 jours
0,995	138 jours

Ce que ce tableau doit faire comprendre

Passer de 0,98 à 0,99 **double** la demi-vie. Deux estimations qui semblent proches décrivent des marchés très différents.

C'est pourquoi la troisième décimale de $\hat{\pi}$ mérite qu'on la regarde — et pourquoi son écart-type d'estimation compte.

Estimation GARCH(1,1) à innovations de Student

$$\hat{\alpha}_1 = 0,0995, \quad \hat{\beta}_1 = 0,8899, \quad \hat{\pi} = 0,9893.$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{0,0195}{1 - 0,9893} = 1,824 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma} = 1,35 \% \text{ par jour.}$$

Demi-vie : **65 jours**, soit environ trois mois de bourse.

Ces valeurs sont typiques

α_1 autour de 0,10, β_1 autour de 0,88, persistance entre 0,97 et 0,99 : c'est ce qu'on obtient sur presque tous les indices et toutes les actions liquides.

Une persistance très proche de 1, mais inférieure à 1 : le fait empirique central de cette littérature.

L'existence des moments

Variance et kurtosis

$$\text{variance finie} \iff \alpha_1 + \beta_1 < 1$$

$$\text{kurtosis fini} \iff (\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1 \quad (\text{innovations gaussiennes})$$

Le kurtosis d'un GARCH(1,1) gaussien

$$\kappa = 3 \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3.$$

Avec $\alpha_1 = 0,10$ et $\beta_1 = 0,89$: la condition $(0,99)^2 + 0,02 = 1,0001 > 1$ **échoue**. Le kurtosis théorique est infini.

Ce que cela signifie, et ce que cela ne signifie pas

Le processus reste parfaitement **stationnaire** et sa variance existe. C'est le moment d'ordre 4 qui n'existe pas.

Conséquence pratique : le kurtosis empirique ne converge pas quand T augmente, et les écarts-types d'estimation doivent être calculés de façon **robuste** — chapitre 14. Ce n'est pas une pathologie du modèle, c'est une propriété des marchés.

Une condition plus faible qu'on ne croit

Un GARCH(1,1) est **strictement stationnaire** si

$$E[\ln(\alpha_1 z_t^2 + \beta_1)] < 0,$$

condition **moins exigeante** que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ par l'inégalité de Jensen.

La conséquence, qui surprend

Un IGARCH – $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ – est strictement stationnaire, donc parfaitement utilisable, alors même que sa variance inconditionnelle est infinie.

Le modèle existe, ses trajectoires sont bien définies, on peut l'estimer et prévoir avec. Il n'a simplement pas de niveau de long terme vers lequel revenir. C'est l'objet du chapitre 13.

Le GARCH(1,1) dans le plan des paramètres

Trois régions

Région	Condition	Statut
stationnaire, moments d'ordre 4	$(\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1$	tout va bien
stationnaire, kurtosis infini	$\alpha_1 + \beta_1 < 1$ mais moment 4 absent	usuel en finance
IGARCH	$\alpha_1 + \beta_1 = 1$	strictement stationnaire

Où se situent les données réelles

Presque toujours dans la deuxième région, tout près de la frontière IGARCH. C'est le fait empirique qui a motivé les modèles à mémoire longue du chapitre 13 — et qui rend la prévision à long horizon délicate.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 8

- La **persistance** $\pi = \alpha_1 + \beta_1$ gouverne tout.
- Stationnarité au second ordre si $\pi < 1$; alors $\sigma^2 = \omega / (1 - \pi)$.
- Un écart à la moyenne se transmet en π^k ; demi-vie = $\ln 0,5 / \ln \pi$.
- Sur données réelles, $\pi \approx 0,98-0,99$: demi-vie de un à trois mois.
- Le kurtosis exige une condition **plus forte** que la variance, souvent violée en finance.
- La stationnarité **stricte** est moins exigeante : un IGARCH reste utilisable.

Vers le chapitre 9

Nous avons répété que le GARCH « est un modèle autorégressif sur la variance ». Le chapitre suivant montre qu'il ne s'agit pas d'une analogie mais d'une identité : un GARCH(p,q) **est** un ARMA sur les carrés.