

# Modélisation GARCH de la volatilité

## Chapitre 7 : Le modèle GARCH(p,q) de Bollerslev



---

Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Le modèle

Pourquoi le GARCH(1,1) suffit presque toujours

La forme en écart à la moyenne

Synthèse

Avant de commencer

---

### Le dilemme de l'ARCH, en une phrase

Une mémoire longue exige beaucoup de paramètres. Beaucoup de paramètres, sur des carrés de résidus, donnent des estimations instables.

Le cours ARMA a déjà rencontré ce dilemme, et l'a résolu : on ajoute à l'équation le **passé de la variable expliquée elle-même**.

## Le modèle

---

Bollerslev (1986)

$$\boxed{h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}}$$
$$\omega > 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0.$$

Le terme nouveau

$\beta_1 h_{t-1}$  : la variance d'aujourd'hui hérite de celle d'hier.

Un seul paramètre de plus que l'ARCH(1) — et il change tout, parce qu'il introduit une **réursion**.

# Les trois termes, trois rôles

## Comment lire l'équation

| Terme                          | Nom                | Ce qu'il fait                           |
|--------------------------------|--------------------|-----------------------------------------|
| $\omega$                       | constante          | fixe le niveau de long terme            |
| $\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$ | <b>réaction</b>    | la variance répond au choc de la veille |
| $\beta_1 h_{t-1}$              | <b>persistance</b> | la variance se souvient d'elle-même     |

## La séparation qui manquait à l'ARCH

L'ARCH confondait réaction et persistance dans un seul jeu de coefficients. Le GARCH les sépare :  $\alpha_1$  dit **de combien** la variance saute,  $\beta_1$  dit **combien de temps** elle reste haute.

Sur données financières, on estime typiquement  $\alpha_1 \approx 0,10$  et  $\beta_1 \approx 0,88$  : réaction modeste, persistance très forte.

## GARCH(p,q)

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad \boxed{\alpha_q \neq 0, \beta_p \neq 0}.$$

### Une convention d'ordre à connaître

$q$  est l'ordre **ARCH** (nombre de chocs retardés),  $p$  l'ordre **GARCH** (nombre de variances retardées). L'ordre d'écriture varie selon les auteurs et les logiciels – vérifier systématiquement la documentation avant d'interpréter une sortie.

Pourquoi le GARCH(1,1) suffit  
presque toujours

---

# La mémoire infinie de deux paramètres

En substituant récursivement  $h_{t-1}$ , puis  $h_{t-2}$ , et ainsi de suite :

$$h_t = \frac{\omega}{1 - \beta_1} + \alpha_1 \sum_{j \geq 0} \beta_1^j \varepsilon_{t-1-j}^2.$$

Le GARCH(1,1) est un ARCH( $\infty$ )

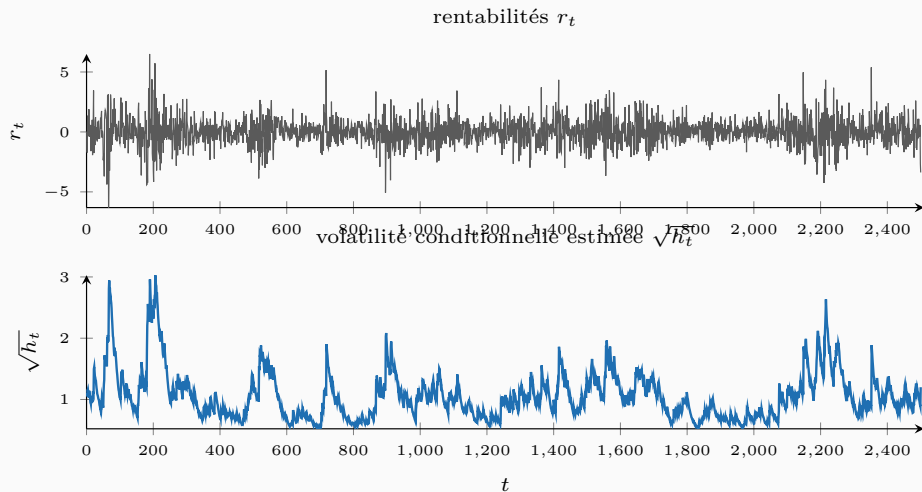
Les poids  $\alpha_1 \beta_1^j$  décroissent **géométriquement**. Tous les chocs passés comptent, avec un poids qui s'estompe à la vitesse  $\beta_1$ .

C'est exactement le procédé du cours ARMA

Un AR(1) était un MA( $\infty$ ) : peu de paramètres, mémoire illimitée. Un GARCH(1,1) est un ARCH( $\infty$ ) : deux paramètres, mémoire illimitée.

La décroissance n'est plus imposée comme dans l'ARCH à poids décroissants du chapitre 6 : sa vitesse,  $\beta_1$ , est **estimée sur les données**.

## Ce que cela donne à voir



### Lecture

En haut les rentabilités, en bas la volatilité conditionnelle estimée. Elle monte franchement lors des chocs, puis **redescend lentement** — sur plusieurs semaines.

Comparez aux dents de scie de l'ARCH(1) du chapitre 4 : c'est  $\beta_1$  qui fait toute la différence.

## GARCH(1,1) contre tout le reste

Hansen et Lunde (2005) comparent 330 modèles de volatilité sur des données de change et d'actions. Aucun ne bat significativement le GARCH(1,1) pour la prévision de la volatilité d'un taux de change.

Sur actions, seuls les modèles **asymétriques** — chapitres 11 et 12 — font mieux. La complexité supplémentaire ne paie que si elle capture l'effet de levier.

## La règle de travail

Commencer par un GARCH(1,1). N'aller au-delà que si un diagnostic précis le justifie — résidus encore hétéroscédastiques, ou asymétrie avérée. C'est la parcimonie du cours ARMA, appliquée à la variance.

## La forme en écart à la moyenne

---

Avec  $\sigma^2 = \omega / (1 - \alpha_1 - \beta_1)$ , l'équation devient :

Le GARCH comme retour à la moyenne

$$h_t - \sigma^2 = \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^2) + \beta_1(h_{t-1} - \sigma^2).$$

La lecture la plus utile du modèle

L'écart de la variance à son niveau normal se transmet d'une période à l'autre au taux  $\alpha_1 + \beta_1$ , augmenté de la surprise du jour.

C'est un processus de **retour à la moyenne sur la variance** — exactement l'Ornstein-Uhlenbeck du cours de calcul stochastique, en temps discret.

Engle et Lee (1999)

$$\begin{aligned}h_t &= q_t + \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 - q_{t-1}) + \beta_1(h_{t-1} - q_{t-1}), \\q_t &= \omega + \rho(q_{t-1} - \omega) + \varphi(\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}).\end{aligned}$$

### Ce qu'elle ajoute

La moyenne de long terme  $q_t$  cesse d'être constante : elle dérive lentement. On sépare une composante **transitoire** — les pics de quelques jours — d'une composante **permanente** — les régimes de volatilité qui durent des années.

Utile pour les horizons longs. Hors du programme, mais à connaître : c'est le pont vers les modèles à changement de régime.

## Synthèse

---

## L'essentiel du chapitre 7

- GARCH(1,1) :  $h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$ , avec  $\omega > 0, \alpha_1, \beta_1 \geq 0$ .
- $\alpha_1$  mesure la **réaction** au choc,  $\beta_1$  la **persistance** de la variance.
- Par substitution, un GARCH(1,1) est un **ARCH**( $\infty$ ) à poids  $\alpha_1 \beta_1^j$  : mémoire infinie, deux paramètres.
- La vitesse de décroissance est **estimée**, non imposée.
- Forme en écart :  $h_t - \sigma^2 = \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^2) + \beta_1 (h_{t-1} - \sigma^2)$  – retour à la moyenne.
- Le GARCH(1,1) est difficile à battre ; seuls les modèles asymétriques y parviennent sur actions.

## Vers le chapitre 8

Reste à établir les conditions sous lesquelles ce modèle tient : stationnarité, persistance, existence des moments. Et à voir ce qui se passe quand  $\alpha_1 + \beta_1$  approche 1 – ce qui est le cas sur presque toutes les données réelles.