

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 4 : Le modèle ARCH(q) d'Engle



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Le modèle ARCH(1)

Le modèle ARCH(q)

La variance de long terme

Ce que l'ARCH sait faire, et ne sait pas faire

Synthèse

Avant de commencer

Engle (1982), *Econometrica*

« Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation ».

Trois mots, trois idées : **hétéroscédasticité** — la variance change ; **conditionnelle** — elle dépend du passé ; **autorégressive** — elle dépend de son propre passé.

Une ironie utile

L'article ne porte pas sur la finance mais sur l'**inflation** britannique. Engle cherchait à mesurer l'incertitude inflationniste. C'est la finance qui s'est emparée du modèle, au point qu'on oublie son origine.

Le modèle ARCH(1)

ARCH(1)

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1),$$

$$\boxed{h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}, \quad \omega > 0, \quad \alpha_1 \geq 0.$$

Comment la lire

La variance d'aujourd'hui est une constante, plus une part du **carré du choc d'hier**.

Un gros choc hier — dans un sens ou dans l'autre — élève la variance d'aujourd'hui. C'est la phrase de Mandelbrot, transformée en équation.

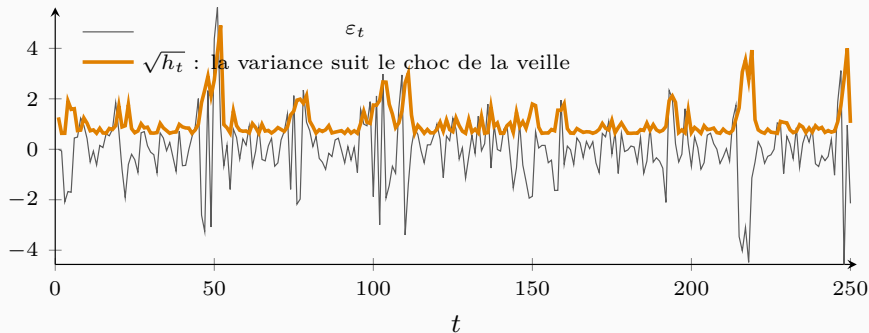
Trois raisons, toutes nécessaires

1. **Le signe ne doit pas compter.** Une baisse de 3 % et une hausse de 3 % annoncent toutes deux de l'agitation. Le carré efface le signe.
2. **La positivité.** $\varepsilon_{t-1}^2 \geq 0$ et $\omega, \alpha_1 \geq 0$ garantissent $h_t > 0$ **quelle que soit** la réalisation. Aucune contrainte à vérifier après coup.
3. **La cohérence dimensionnelle.** h_t est une variance : elle doit s'exprimer en carrés de rentabilités.

Et le prix à payer

Le carré efface le signe **trop bien** : il rend le modèle rigoureusement symétrique. Le fait 5 — l'effet de levier — est hors d'atteinte. On y reviendra au chapitre 11.

Ce qu'une trajectoire donne à voir



Lecture

La courbe épaisse est $\sqrt{h_t}$. Elle saute dès qu'un gros choc survient, puis retombe **dès la période suivante** si le choc suivant est petit.

Retenez ce comportement en dents de scie : c'est la principale faiblesse de l'ARCH, et le chapitre 7 la corrigera.

Le modèle ARCH(q)

ARCH(q)

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad \omega > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \boxed{\alpha_q \neq 0}.$$

Comme pour l'AR du cours précédent, la condition $\alpha_q \neq 0$ définit l'ordre : sans elle, un ARCH(3) dont $\alpha_3 = 0$ serait un ARCH(2), et la question « quel est l'ordre ? » n'aurait pas de sens.

La parenté avec l'AR

C'est un modèle **autorégressif**, mais sur les carrés des chocs plutôt que sur la série elle-même. Le chapitre 9 montrera que cette analogie est bien plus qu'une image : c'est une identité algébrique.

Ce qu'il faut imposer, et pourquoi

Contrainte	Ce qu'elle assure
$\omega > 0$	la variance ne peut pas s'annuler
$\alpha_i \geq 0$	positivité de h_t en toute circonstance
$\sum_i \alpha_i < 1$	existence d'une variance inconditionnelle finie

La troisième mérite qu'on s'y arrête

Si $\sum \alpha_i \geq 1$, chaque choc est amplifié plutôt qu'amorti : la variance diverge et le processus n'est plus stationnaire. C'est l'analogie exact de la condition $|\alpha| < 1$ de l'AR(1). Le chapitre 5 la démontre.

La variance de long terme

En prenant l'espérance de l'équation ARCH et en utilisant $E(\varepsilon_{t-i}^2) = \sigma^2$ pour tout i :

$$\sigma^2 = \omega + \sigma^2 \sum_{i=1}^q \alpha_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_i \alpha_i}}$$

Trois lectures d'une même formule

La variance inconditionnelle est **entièrement déterminée** par les paramètres.

Elle explose quand $\sum \alpha_i \rightarrow 1$: la stationnarité se perd continûment, non brutalement.

Et ω n'est pas la variance de long terme : il en est un déterminant, amplifié par la persistance — exactement comme la constante θ d'un AR n'était pas son espérance.

En remplaçant ω par $\sigma^2(1 - \sum \alpha_i)$:

Écriture en rappel vers la moyenne

$$h_t - \sigma^2 = \sum_{i=1}^q \alpha_i (\varepsilon_{t-i}^2 - \sigma^2).$$

C'est la forme la plus parlante

La variance conditionnelle s'écarte de sa moyenne de long terme dans la mesure où les chocs récents ont été plus gros que la normale. Quand les chocs sont d'ampleur ordinaire, h_t revient vers σ^2 .

Le modèle décrit donc un **retour à la moyenne** — sur la variance, non sur le niveau.

Ce que l'ARCH sait faire, et ne sait
pas faire

Face aux six faits stylisés

Fait	ARCH?
1. Rentabilités non corrélées	oui , par construction
2. Queues épaisses	oui , même avec z_t gaussien
3. Regroupement de la volatilité	oui , c'est son objet
4. ACF lente des carrés	partiellement — voir ci-dessous
5. Effet de levier	non , le modèle est symétrique
6. Gaussianité par agrégation	oui

Une mémoire trop courte

L'ARCH(q) oublie tout au-delà de q périodes — comme un MA(q) oublie tout au-delà de q retards. Pour reproduire une ACF des carrés qui décroît lentement sur vingt ou trente retards, il faudrait q très grand.

Ce que cela coûte

Sur le jeu de données du cours, l'ACF de r_t^2 reste significative jusqu'au retard 20. Il faudrait donc estimer une vingtaine de paramètres α_i , tous contraints positifs, tous mal estimés.

C'est exactement le problème que l'ARMA résolvait par la parcimonie — et la solution sera de même nature.

Le pas suivant

Bollerslev (1986) proposera d'ajouter à l'équation le **passé de h_t elle-même**. Deux paramètres suffiront alors là où il en fallait vingt. C'est le GARCH, et c'est le chapitre 7.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 4

- ARCH(1) : $h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$. La variance dépend du **carré** du choc précédent.
- Le carré assure trois choses : indifférence au signe, positivité automatique, cohérence dimensionnelle.
- ARCH(q) : $h_t = \omega + \sum_i \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$, avec $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_q \neq 0$.
- Stationnarité si $\sum_i \alpha_i < 1$; alors $\sigma^2 = \omega / (1 - \sum \alpha_i)$.
- Forme en écart : $h_t - \sigma^2 = \sum_i \alpha_i (\varepsilon_{t-i}^2 - \sigma^2)$ – retour à la moyenne sur la variance.
- Deux faiblesses : mémoire trop courte, et symétrie irrémédiable.

Vers le chapitre 5

Avant de corriger ces faiblesses, il faut établir ce que l'ARCH produit exactement : ses moments, son kurtosis, ses conditions de stationnarité. C'est là qu'on verra pourquoi les queues épaisses apparaissent sans qu'on les ait demandées.