

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 10 : La loi des innovations



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

La loi normale

La loi de Student

L'asymétrie

Les autres lois usuelles

Synthèse

Avant de commencer

Le modèle s'écrit $\varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t$ avec z_t i.i.d. centrée réduite. Nous avons entièrement spécifié h_t . Reste à choisir la loi de z_t .

Ce qui se joue ici

h_t décide de **l'échelle** du risque. z_t décide de sa **forme** — donc de la probabilité des événements extrêmes, donc de la VaR.

Pour la prévision de volatilité, ce choix compte peu. Pour la gestion du risque, il est décisif.

La loi normale

GARCH gaussien

$$z_t \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Ce qu'elle apporte

Le chapitre 5 l'a montré : même avec des innovations gaussiennes, le processus ε_t a des queues épaisses. Le mélange de variances y suffit.

C'est ce qui a fait le succès du GARCH gaussien : il reproduit le fait 2 sans avoir à y toucher.

Le test, sur les données du cours

Kurtosis des rentabilités brutes : 6,05.

Kurtosis des résidus standardisés $z_t = \hat{\varepsilon}_t / \sqrt{\hat{h}_t}$: 4,66.

Le GARCH a absorbé une partie de l'excès — mais il reste 4,66 là où la loi normale exige 3.

Le diagnostic

Le regroupement de la volatilité explique une **partie** des queues épaisses, pas la totalité. Il subsiste des chocs extrêmes qui ne s'expliquent pas par un niveau de volatilité élevé : ce sont de véritables surprises.

Il faut donc une loi à queues épaisses pour z_t elle-même.

La loi de Student

Student standardisée (Bollerslev, 1987)

z_t suit une loi de Student à ν degrés de liberté, remise à l'échelle pour que $V(z_t) = 1$:

$$f(z) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi(\nu-2)}} \left(1 + \frac{z^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad \nu > 2.$$

Son kurtosis

$$\kappa_z = 3 \frac{\nu-2}{\nu-4} \quad (\nu > 4), \quad \kappa_z \rightarrow 3 \text{ quand } \nu \rightarrow \infty.$$

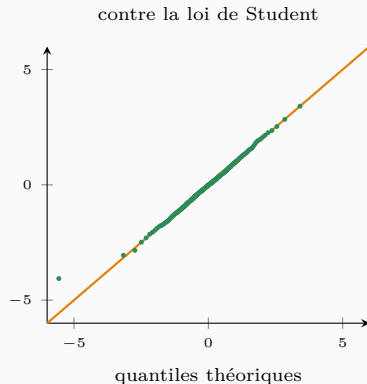
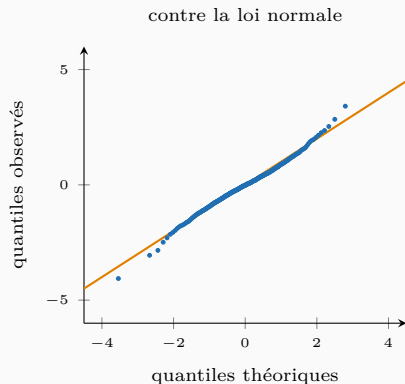
Quelques valeurs

ν	κ_z
5	9,0
6	6,0
8	4,5
15	3,5
$\rightarrow \infty$	3,0

Le paramètre est directement interprétable

ν **est** une mesure de l'épaisseur des queues résiduelles : plus il est petit, plus les surprises extrêmes sont fréquentes. Sur données financières quotidiennes, on estime typiquement ν entre 5 et 10.

Une valeur estimée supérieure à 20 signifie que la normale suffisait.



Deux diagrammes quantile-quantile

À gauche, contre la loi normale : les points s'écartent nettement de la droite aux deux extrémités — les queues observées sont plus épaisses.

À droite, contre la loi de Student à $\hat{\nu} = 6,46$: les points suivent la droite jusque dans les queues.

L'asymétrie

Skewness négative

Les rentabilités présentent en général une asymétrie **négative** : les grandes baisses sont plus fréquentes et plus fortes que les grandes hausses.

Ne pas confondre avec l'effet de levier

L'**effet de levier** est une propriété de la dynamique : le signe du choc d'hier influe sur la variance d'aujourd'hui. C'est l'affaire de h_t , traitée aux chapitres 11 et 12.

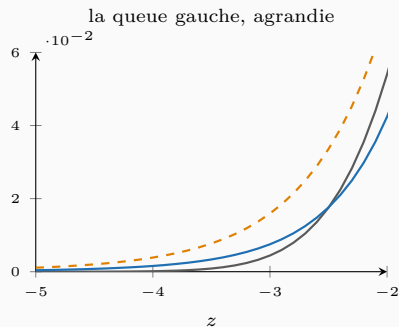
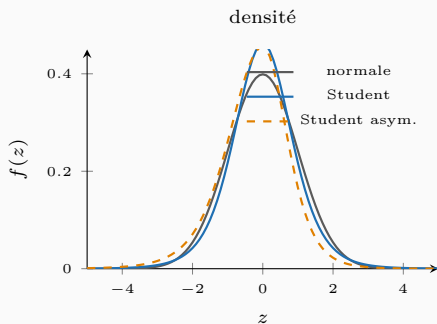
L'**asymétrie de la loi** est une propriété statique de z_t : à volatilité donnée, la queue gauche est plus lourde que la droite. Ce sont deux mécanismes distincts, et un bon modèle a souvent besoin des deux.

Fernández et Steel (1998)

On introduit un paramètre $\xi > 0$ qui comprime un côté et dilate l'autre :

$$f(z \mid \xi) = \frac{2}{\xi + \xi^{-1}} \left[f(\xi z) \mathbf{1}_{\{z < 0\}} + f(z/\xi) \mathbf{1}_{\{z \geq 0\}} \right].$$

$\xi = 1$: symétrie. $\xi < 1$: queue gauche plus lourde.



Les autres lois usuelles

Quatre choix, quatre profils

Loi	Paramètres	Queues	Asymétrie
Normale	0	finies	non
Student	1 (ν)	épaisses	non
GED	1 (κ)	réglables	non
Student asymétrique	2 (ν, ξ)	épaisses	oui

La GED, en un mot

Generalized Error Distribution : $f(z) \propto \exp(-|z/\lambda|^\kappa)$. Pour $\kappa = 2$ c'est la normale, pour $\kappa = 1$ la Laplace, et pour $\kappa < 1$ des queues très épaisses.

Elle est plus souple que la Student près du centre, mais son paramètre est moins directement interprétable.

Une procédure en trois temps

1. Estimer avec la loi **normale**, et examiner le kurtosis des résidus standardisés.
2. S'il dépasse nettement 3, passer à la **Student**, et lire $\hat{\nu}$.
3. Si l'asymétrie des résidus standardisés est nettement négative, passer à la **Student asymétrique** et tester $\xi = 1$.

Le critère de décision

Le BIC, comme au chapitre 13 du cours ARMA. Chaque paramètre de loi supplémentaire doit gagner plus qu'il ne coûte — soit environ $\ln T \approx 8$ points de log-vraisemblance sur un échantillon de 2 500 observations.

Le quantile à 1 pour cent, à volatilité identique

Loi	$z_{0,01}$
Normale	-2,33
Student, $\nu = 6$	-2,75
Student asym., $\nu = 6, \xi = 0,85$	-3,09

Un tiers d'écart sur le capital réglementaire

Passer de la normale à la Student asymétrique élargit la VaR de plus de **30 %**. Pour une banque, c'est un tiers de fonds propres en plus — ou en moins.

h_t dit **quand** le risque monte; z_t dit **de combien** il faut se couvrir. Les deux sont indispensables, et c'est le second qui décide du chiffre final.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 10

- Le GARCH gaussien produit déjà des queues épaisses **inconditionnelles** : c'est le mélange de variances.
- Mais il n'en produit pas assez : les résidus standardisés conservent un kurtosis de 4,66.
- La **Student** ajoute un paramètre ν , directement lisible : $\kappa_z = 3(\nu - 2)/(\nu - 4)$.
- Sur les données du cours, $\hat{\nu} = 6,46$ et le BIC gagne 97 points.
- L'**asymétrie de la loi** (ξ) est distincte de l'**effet de levier** (dynamique de h_t).
- Le choix de la loi modifie la VaR de plus de 30 % : c'est là que se décide le chiffre.

Vers la partie IV

Il reste le fait stylisé que ni l'ARCH ni le GARCH ne savent reproduire : l'effet de levier. Il faudra rompre la symétrie de l'équation de variance.