

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 13 : IGARCH, GARCH-M et la mémoire longue



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Le modèle IGARCH

Le modèle GARCH-M

La mémoire longue

Le tableau de la famille

Synthèse

Avant de commencer

Une persistance qui touche la borne

Sur presque toute série financière, la persistance estimée se situe entre 0,97 et 0,995. Son écart-type d'estimation est de l'ordre de 0,01.

On ne peut donc **pas rejeter** $\pi = 1$. Or à $\pi = 1$ la variance inconditionnelle n'existe plus. Ce chapitre examine trois réponses à cette situation.

Le modèle IGARCH

Engle et Bollerslev (1986)

On impose la contrainte $\alpha_1 + \beta_1 = 1$:

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha_1) h_{t-1}.$$

Un paramètre de moins à estimer.

Ce que « I » signifie

Integrated — par analogie avec l'ARIMA. En termes de la dualité du chapitre 9, l'ARMA sur les carrés a une **racine unitaire**.

Un choc de volatilité ne s'estompe jamais : il déplace définitivement le niveau de la variance.

Trois conséquences

1. Pas de variance inconditionnelle finie : $\sigma^2 = \omega/0$.
2. Le processus reste **strictement stationnaire** — la condition du chapitre 8 est satisfaite.
3. La prévision de volatilité ne converge vers **aucun** niveau : elle reste au niveau courant, avec une dérive due à ω .

Un cas particulier célèbre

Avec $\omega = 0$ et $\alpha_1 = 0,06$:

$$h_t = 0,94 h_{t-1} + 0,06 \varepsilon_{t-1}^2.$$

C'est **exactement** le lissage exponentiel de RiskMetrics, la méthode que J.P. Morgan a diffusée en 1994 et qui reste la référence pratique dans beaucoup de salles de marché.

RiskMetrics est donc un IGARCH aux paramètres imposés, non estimés.

Deux lectures du même résultat

Prise au sérieux : la volatilité n'a pas de niveau de long terme, les chocs sont permanents.

Prise comme un symptôme : la persistance apparente est un artefact. Si le niveau de volatilité change de régime au cours de l'échantillon — crise de 2008, pandémie de 2020 — un GARCH à paramètres constants interprète ces changements comme une persistance extrême.

La seconde lecture est la mieux étayée

Lamoureux et Lastrapes (1990) montrent qu'en introduisant des ruptures de niveau, la persistance estimée chute nettement.

C'est le même piège qu'au chapitre 9 du cours ARMA : une **rupture structurelle** se fait passer pour une racine unitaire. Le remède est identique — regarder la série, découper l'échantillon.

Le modèle GARCH-M

Engle, Lilien et Robins (1987)

Le risque entre dans l'équation de moyenne :

$$r_t = \mu + \delta g(h_t) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t,$$

avec $g(h_t) = h_t, \sqrt{h_t}$ ou $\ln h_t$ selon les auteurs.

Ce que cela dit économiquement

Un actif plus risqué doit rapporter davantage. δ est la prime de risque, mesurée : le supplément de rentabilité exigé par unité de volatilité.

C'est le seul modèle du cours où l'équation de variance influence l'équation de moyenne — donc où le risque est rémunéré.

Un résultat décevant, et instructif

$\hat{\delta}$ est le plus souvent **positif mais non significatif** sur données quotidiennes. Le signe est conforme à la théorie, l'ampleur est indiscernable de zéro.

Deux explications : la prime de risque se manifeste à des horizons longs — mensuels ou annuels — alors que le GARCH travaille au jour; et le rapport signal sur bruit est très défavorable, puisqu'on a montré au cours précédent que μ ne s'estime pas.

Pourquoi l'enseigner malgré tout

Parce que c'est le lien formel entre ce cours et la théorie financière — le MEDAF, la frontière efficiente. Et parce que son échec empirique est en soi un résultat : la relation risque-rendement n'est pas mesurable à l'échelle quotidienne.

La mémoire longue

Ce que l'ACF des carrés montre vraiment

Sur séries longues, l'ACF de ε_t^2 décroît **plus lentement** qu'une exponentielle : elle suit une décroissance en puissance,

$$\rho_k \sim k^{-\theta}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Un GARCH ne peut pas produire cela

Un GARCH stationnaire décroît en π^k — géométriquement. Une décroissance en $k^{-\theta}$ est bien plus lente.

C'est ce qui explique que la persistance estimée soit toujours poussée vers 1 : le modèle tente d'imiter, avec une exponentielle, une décroissance qui n'en est pas une.

Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996)

On introduit une différenciation **fractionnaire** $d \in]0, 1[$ dans l'ARMA sur les carrés :

$$\phi(L) (1 - L)^d \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)] v_t.$$

L'opérateur $(1 - L)^d$

Défini par son développement en série :

$$(1 - L)^d = \sum_{j \geq 0} \binom{d}{j} (-L)^j = 1 - dL - \frac{d(1-d)}{2} L^2 - \dots$$

Le paramètre d interpole

$d = 0$: GARCH ordinaire, mémoire géométrique.

$d = 1$: IGARCH, chocs permanents.

$0 < d < 1$: mémoire **longue** — les chocs s'estompent, mais lentement, en puissance. C'est le régime intermédiaire qui manquait.

Un modèle à connaître, rarement à employer

Le FIGARCH est difficile à estimer, coûteux en calcul, et son gain en prévision reste modeste sur des horizons courts.

Son intérêt est **conceptuel** : il montre que la persistance quasi unitaire des GARCH n'est pas nécessairement une racine unitaire, mais peut être la trace d'une mémoire longue — deux choses très différentes pour la prévision à long horizon.

Le tableau de la famille

Récapitulatif

Les modèles vus dans ce cours

Modèle	Ce qu'il ajoute	À employer quand
ARCH(q)	variance conditionnelle	jamais seul, en pratique
GARCH(p,q)	persistance à peu de paramètres	cas de référence
GARCH-t	queues épaisses résiduelles	toujours en finance
GJR / EGARCH	effet de levier	actions et indices
IGARCH	persistance unitaire imposée	VaR rapide, style RiskMetrics
GARCH-M	prime de risque	horizons longs
FIGARCH	mémoire longue	recherche, séries très longues

La règle qui résume la partie IV

Un **GJR-GARCH(1,1)** à innovations de Student couvre l'essentiel des besoins. Tout le reste est une réponse à un diagnostic précis — et doit être justifié par ce diagnostic, non choisi par goût de la nouveauté.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 13

- **IGARCH** : $\alpha_1 + \beta_1 = 1$. Chocs permanents, pas de variance de long terme, mais stationnarité stricte préservée.
- RiskMetrics ($\lambda = 0,94$) est un IGARCH à paramètres imposés.
- Une persistance proche de 1 est souvent l'ombre d'une **rupture de régime**, comme une racine unitaire l'était au cours précédent.
- **GARCH-M** : le risque entre dans l'équation de moyenne ; δ est la prime de risque, rarement significative au jour le jour.
- L'ACF des carrés décroît en **puissance**, non en exponentielle : c'est la mémoire longue.
- **FIGARCH** interpole entre GARCH ($d = 0$) et IGARCH ($d = 1$).

Vers la partie V

Les modèles sont posés. Il reste à les estimer, à les valider, à s'en servir pour prévoir — et à transformer cette prévision en un chiffre de risque.