

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 12 : GJR-GARCH, TGARCH et la courbe d'impact



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Le modèle GJR-GARCH

Le modèle TGARCH

Comparer les trois asymétries

Le bilan face aux faits stylisés

Synthèse

Avant de commencer

L'idée, plus simple que celle de Nelson

Garder l'équation du GARCH telle quelle, et **ajouter un terme qui ne s'active que pour les chocs négatifs**.

Pas de logarithme, pas de changement d'échelle : un seul paramètre de plus.

Le modèle GJR-GARCH

Glosten, Jagannathan et Runkle (1993)

$$h_t = \omega + (\alpha_1 + \gamma I_{t-1}) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

$$I_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une variable indicatrice, rien de plus

C'est le procédé des variables qualitatives du cours d'économétrie : une indicatrice qui change la pente selon le régime.

Un choc positif pèse α_1 ; un choc négatif pèse $\alpha_1 + \gamma$.

Trois cas

Valeur de γ	Interprétation
$\gamma = 0$	GARCH ordinaire, symétrique
$\gamma > 0$	effet de levier : les baisses pèsent davantage
$\gamma < 0$	asymétrie inverse, observée sur certaines matières premières

Le test se lit directement dans la sortie du logiciel

$H_0 : \gamma = 0$ par un test de Student. C'est le test d'effet de levier le plus employé, parce qu'il ne demande aucun modèle supplémentaire et que le coefficient s'interprète en clair.

Positivité et stationnarité

$$\omega > 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_1 + \gamma \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0$$

$$\text{stationnarité : } \alpha_1 + \frac{\gamma}{2} + \beta_1 < 1.$$

D'où vient le $\gamma/2$

Si z_t est de loi symétrique, l'indicatrice vaut 1 une fois sur deux. En moyenne, le coefficient effectif du choc est donc $\alpha_1 + \gamma/2$.

La persistance d'un GJR est $\pi = \alpha_1 + \gamma/2 + \beta_1$, et la variance de long terme $\sigma^2 = \omega/(1 - \pi)$.

Estimation, innovations de Student

$$h_t = 0,0232 + (0,0434 + 0,1157 I_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + 0,8862 h_{t-1}, \quad \hat{\nu} = 6,62.$$

Ce que ces chiffres disent

Un choc positif pèse 0,043; un choc négatif pèse $0,043 + 0,116 = 0,159$.

À ampleur égale, une baisse a près de quatre fois l'impact d'une hausse. C'est l'effet de levier, mesuré.

Persistance : $0,043 + 0,058 + 0,886 = 0,987$.

Comparaison des trois modèles

Modèle	log-vraisemblance	AIC	BIC
GARCH(1,1) normal	−3 543,2	7 094,5	7 117,8
GARCH(1,1) Student	−3 491,0	6 992,0	7 021,1
GJR-GARCH Student	−3 476,8	6 965,5	7 000,5

La leçon du tableau

Deux améliorations successives, toutes deux nettes : la loi de Student gagne 97 points de BIC, l'asymétrie en gagne 21 de plus.

Et l'ordre compte : on traite d'abord la loi, puis l'asymétrie. Une asymétrie estimée sous hypothèse gaussienne serait contaminée par les queues épaisses non modélisées.

Le modèle TGARCH

Zakoïan (1994)

$$\sqrt{h_t} = \omega + \alpha_1^+ \varepsilon_{t-1}^+ - \alpha_1^- \varepsilon_{t-1}^- + \beta_1 \sqrt{h_{t-1}},$$

avec $\varepsilon^+ = \max(\varepsilon, 0)$ et $\varepsilon^- = \min(\varepsilon, 0)$.

Ce qui change

L'équation porte sur l'**écart-type** et sur le choc en **valeur absolue**, non sur leurs carrés.

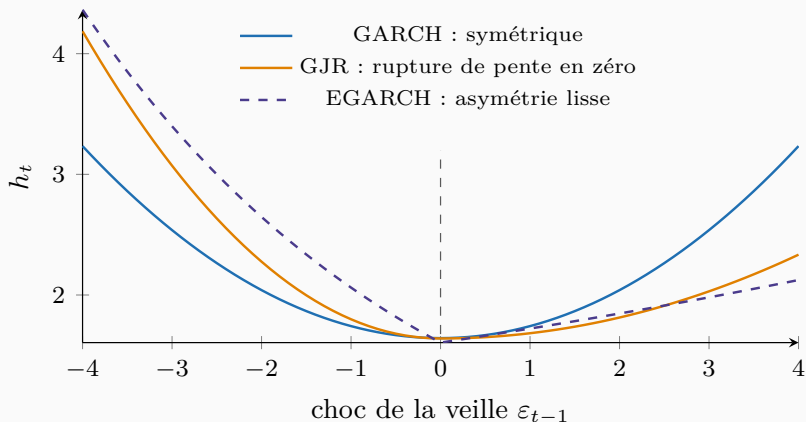
Conséquence : le modèle est moins sensible aux valeurs extrêmes. Un choc de 5 écarts-types pèse 5 fois plus qu'un choc unitaire, non 25 fois. C'est un avantage réel sur données très agitées.

Attention au vocabulaire

Le nom TGARCH — *threshold* — désigne selon les auteurs et les logiciels tantôt le modèle de Zakoïan, tantôt le GJR. EViews appelle « TARCH » ce que R appelle « GJR ». Toujours vérifier l'équation affichée, jamais se fier au nom.

Comparer les trois asymétries

Les courbes d'impact



Trois formes, trois mécanismes

Modèle	Forme de la courbe
--------	--------------------

Le tableau de choix

Quel modèle pour quel usage

Critère	GARCH	GJR	EGARCH
Paramètres	3	4	4
Contraintes de positivité	oui	oui	aucune
Effet de levier	non	oui	oui
Interprétation directe	++	++	+
Prévision à plusieurs pas	simple	simple	délicate
Robustesse aux extrêmes	+	+	-

La recommandation

Commencer par un **GJR-GARCH(1,1) à innovations de Student**. C'est le meilleur compromis : une asymétrie testable en un coefficient, des prévisions simples, et une interprétation immédiate.

Passer à l'EGARCH si les contraintes de positivité posent problème à l'estimation, ou si la rupture de pente en zéro paraît difficile à défendre.

Le bilan face aux faits stylisés

Ce que chaque modèle sait faire

Le tableau récapitulatif de la partie IV

Fait	ARCH	GARCH	GARCH-t	GJR-t
1. Non-corrélation	oui	oui	oui	oui
2. Queues épaisses	partiel	partiel	oui	oui
3. Regroupement	oui	oui	oui	oui
4. ACF lente des carrés	non	oui	oui	oui
5. Effet de levier	non	non	non	oui
6. Gaussianité par agrégation	oui	oui	oui	oui

Lire ce tableau de gauche à droite

Chaque colonne corrige exactement une insuffisance de la précédente. C'est l'histoire de la discipline en quatre étapes — et l'ordre dans lequel il faut construire un modèle sur données réelles.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 12

- GJR-GARCH : $h_t = \omega + (\alpha_1 + \gamma I_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$, avec $I_{t-1} = \mathbf{1}\{\varepsilon_{t-1} < 0\}$.
- $\gamma > 0$: effet de levier; le test est un simple test de Student sur γ .
- Persistance : $\pi = \alpha_1 + \gamma/2 + \beta_1$; variance de long terme $\omega/(1 - \pi)$.
- Sur les données du cours : un choc négatif pèse **quatre fois** un choc positif.
- TGARCH : même idée sur l'écart-type et la valeur absolue, plus robuste aux extrêmes.
- Ordre de travail : d'abord la loi des innovations, ensuite l'asymétrie.

Vers le chapitre 13

Reste une question que toutes les estimations posent sans la résoudre : que faire quand la persistance estimée est si proche de 1 qu'on ne peut plus la distinguer de 1?