

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 1 : Mandelbrot et les faits stylisés des rentabilités



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Prérequis

Avant de commencer

Mandelbrot, 1963

Les faits stylisés

De l'observation au modèle

Synthèse

Prérequis

Le cours qui précède

Modélisation ARMA, dont ce cours reprend exactement le point d'arrivée.

Les notions mobilisées

Stationnarité, autocorrélogramme, opérateur retard. La démarche de **Box et Jenkins** — identifier, estimer, valider. Le test de **Ljung-Box** et les critères d'information.

Le point de départ

L'ARMA s'arrêtait sur un constat : les rentabilités ne sont **pas corrélées**, mais leurs **carrés le sont fortement**.

Tout ce cours consiste à transposer la démarche de Box et Jenkins de la moyenne vers la variance. Les outils sont les mêmes; c'est l'objet qui change.

Avant de commencer

Le cours de modélisation ARMA s'est achevé sur un constat précis, obtenu par le calcul.

Ce que le cours précédent a établi

Test	Statistique	Conclusion
Ljung-Box sur r_t	17,0	non corrélées
Ljung-Box sur r_t^2	968,1	fortement dépendantes

La conséquence, et c'est tout ce cours

Les rentabilités sont un bruit blanc **faible** : non corrélées. Elles ne sont pas un bruit blanc **fort** : pas indépendantes.

L'ARMA a épuisé ce qu'on pouvait dire de leur **moyenne** conditionnelle. Il reste tout à dire de leur **variance** conditionnelle.

Mandelbrot, 1963

Mandelbrot (1963), sur le prix du coton

En examinant un siècle de cotations, Benoît Mandelbrot établit deux choses que la finance de l'époque tenait pour acquises — et qui sont fausses :

1. les variations de prix ne suivent **pas** une loi normale ;
2. les grandes variations **se regroupent** dans le temps.

La phrase qui a fondé la discipline

« Les grands changements tendent à être suivis de grands changements, de l'un ou l'autre signe, et les petits changements par de petits changements. »

Tout le cours consiste à donner un modèle à cette observation — et il faudra attendre **vingt ans** pour qu'Engle y parvienne.

L'obstacle n'était pas l'observation, il était le cadre

Le fait était visible sur n'importe quel graphique. Ce qui manquait, c'était une manière d'écrire un modèle où la **variance change dans le temps** sans que le processus cesse d'être stationnaire.

Mandelbrot proposait d'abandonner la variance finie — les lois de Lévy stables. Engle propose en 1982 de la garder, mais de la rendre **conditionnelle**. C'est cette seconde voie qui l'a emporté, et qui lui vaudra le prix Nobel en 2003.

Les faits stylisés

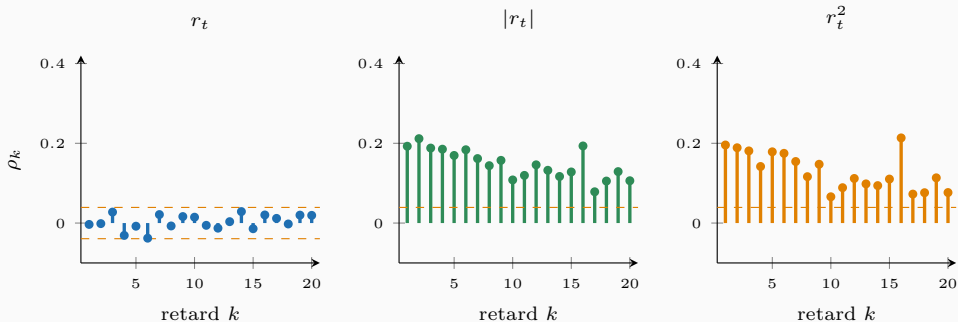
Les six faits stylisés

1. **Absence d'autocorrélation** des rentabilités.
2. **Queues épaisses** : les extrêmes sont bien plus fréquents que sous la loi normale.
3. **Regroupement de la volatilité** : les périodes agitées et calmes viennent par blocs.
4. **Autocorrélation lente des carrés** et des valeurs absolues.
5. **Effet de levier** : une baisse fait plus monter la volatilité qu'une hausse.
6. **Gaussianité par agrégation** : plus l'horizon s'allonge, plus la loi se rapproche de la normale.

Comment lire cette liste

Ce ne sont pas six curiosités. Ce sont six **contraintes** : tout modèle proposé sera jugé sur sa capacité à les reproduire. Le cours les reprendra une par une, et le chapitre 13 dressera le bilan.

Fait 1 : aucune mémoire linéaire



Trois corrélogrammes, deux conclusions

À gauche, l'ACF de r_t : plate, tout est dans les bandes. Au centre et à droite, celles de $|r_t|$ et de r_t^2 : significatives sur vingt retards, et elles décroissent lentement.

La série n'a **aucune** mémoire de son signe et **beaucoup** de mémoire de son amplitude.

Le kurtosis

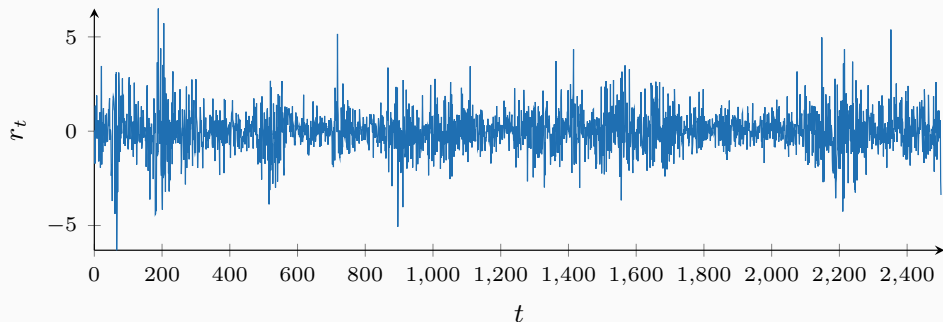
$$\kappa = \frac{E[(r_t - \mu)^4]}{[V(r_t)]^2}, \quad \kappa = 3 \text{ pour une loi normale.}$$

Sur le jeu de données du cours : $\kappa = 6,05$. Sur des indices boursiers quotidiens, la valeur usuelle se situe entre 5 et 20.

Ce que cela change en gestion du risque

Sous la loi normale, une perte de plus de trois écarts-types survient une fois tous les 750 jours — trois ans. Avec un kurtosis de 6, elle survient plusieurs fois par an. C'est **toute la différence** entre une VaR crédible et une VaR décorative.

Fait 3 : le regroupement de la volatilité



Ce que l'œil voit immédiatement

Des blocs. Des mois entiers où la série oscille faiblement, puis des périodes où elle s'agite, puis le calme revient.

Aucune tendance, aucune saisonnalité : la moyenne ne bouge pas. C'est **l'amplitude** qui a une dynamique.

De l'observation au modèle

La clé du cours

Si r_t^2 est autocorrélé, alors r_t^2 est **prévisible** à partir de son passé. Et r_t^2 est un estimateur — bruité mais sans biais — de la variance du jour.

Donc : **la variance de demain se prévoit.**

Le renversement de perspective

On tenait pour acquis qu'en finance rien ne se prévoit. C'est vrai du **rendement**. C'est faux de la **volatilité** — et c'est précisément la volatilité qui détermine le risque, donc le capital réglementaire, donc le prix des options.

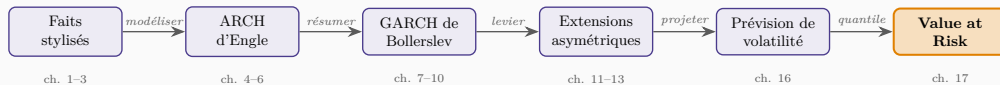
Variance conditionnelle

$$h_t = V(r_t \mid \Omega_{t-1})$$

La variance de la rentabilité du jour, **sachant tout ce qu'on savait la veille**. Elle change à chaque date, alors que la variance inconditionnelle $V(r_t)$ reste constante.

Les deux variances ne se contredisent pas

La série reste stationnaire au sens faible : sa variance globale existe et est finie. Ce qui varie, c'est ce qu'on en **prévoit** à chaque instant, compte tenu du passé récent. Le chapitre 3 explicite cette distinction.



Synthèse

L'essentiel du chapitre 1

- Mandelbrot (1963) : les rentabilités ne sont pas gaussiennes, et les grandes variations se regroupent.
- Six faits stylisés, qui serviront de cahier des charges à tout modèle.
- Rentabilités non corrélées, mais $|r_t|$ et r_t^2 fortement autocorrélés.
- Kurtosis très supérieur à 3 : les extrêmes sont sous-estimés par la loi normale.
- r_t^2 étant prévisible, la **variance de demain** se prévoit — pas le rendement.
- Engle (1982) garde la variance finie et la rend **conditionnelle** : $h_t = V(r_t \mid \Omega_{t-1})$.

Vers le chapitre 2

Deux des six faits demandent un examen séparé, parce qu'ils commandent le choix du modèle : le regroupement de la volatilité, et son asymétrie — l'effet de levier.