

# Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 9 : La dualité GARCH et ARMA sur les carrés



---

Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

La transformation

Ce que la dualité fait comprendre

Ce que la dualité permet de faire

Synthèse

Avant de commencer

---

### Ce que ce chapitre démontre

Un GARCH( $p, q$ ) sur  $\varepsilon_t$  **est** un ARMA( $\max(p, q), p$ ) sur  $\varepsilon_t^2$ .

Ce n'est pas une ressemblance : c'est la même équation, réécrite. Toute la théorie du cours ARMA s'applique donc directement, sans rien redémontrer.

## La transformation

---

## Définition

$$v_t = \varepsilon_t^2 - h_t.$$

Trois propriétés, toutes immédiates :

$$\mathbb{E}(v_t \mid \Omega_{t-1}) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \mid \Omega_{t-1}) - h_t = h_t - h_t = 0$$

$$\text{Cov}(v_t, v_{t-k}) = 0 \quad (k \geq 1)$$

$v_t$  est un bruit blanc

Centré, non corrélé. C'est la **surprise** de la variance : l'écart entre le carré réalisé et ce qu'on en attendait la veille.

### Une réserve importante

$v_t$  est un bruit blanc **faible**, et sa variance n'est **pas constante** : elle dépend de  $h_t^2$ . C'est un bruit blanc hétéroscédastique.

Cela ne gêne pas l'algèbre qui suit, mais explique pourquoi on n'estimera **pas** le GARCH par les moindres carrés sur les carrés — chapitre 14.

Partons du GARCH(1,1) et remplaçons  $h_t$  par  $\varepsilon_t^2 - v_t$  et  $h_{t-1}$  par  $\varepsilon_{t-1}^2 - v_{t-1}$  :

$$\varepsilon_t^2 - v_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - v_{t-1})$$

En regroupant :

**Le résultat**

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1) \varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1}$$

## C'est un ARMA(1,1)

Avec les notations du cours précédent, en posant  $y_t = \varepsilon_t^2$  :

$$y_t = \theta + \underbrace{(\alpha_1 + \beta_1)}_{\text{coefficient AR}} y_{t-1} + v_t - \underbrace{\beta_1}_{\text{coefficient MA}} v_{t-1}.$$

## La correspondance des paramètres

| GARCH(1,1)           | ARMA(1,1) sur $\varepsilon_t^2$ |
|----------------------|---------------------------------|
| $\alpha_1 + \beta_1$ | coefficient autorégressif       |
| $-\beta_1$           | coefficient de moyenne mobile   |
| $\omega$             | constante                       |

## GARCH(p,q) et ARMA

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j},$$

soit un **ARMA**( $\max(p, q), p$ ) sur les carrés, avec la convention  $\alpha_i = 0$  pour  $i > q$  et  $\beta_j = 0$  pour  $j > p$ .

Ce que la dualité fait comprendre

---

### Sans aucun calcul nouveau

Un ARMA(1,1) est stationnaire si son coefficient autorégressif est de module inférieur à 1. Ici ce coefficient vaut  $\alpha_1 + \beta_1$ .

D'où  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$  — la condition du chapitre 8, obtenue comme corollaire du cours précédent.

### Résultat immédiat

Un ARMA(1,1) a une ACF qui décroît géométriquement au taux du coefficient AR dès le retard 2. Donc

$$\text{Corr}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2) \propto (\alpha_1 + \beta_1)^k.$$

### L'explication du fait 4

Avec  $\pi = 0,99$ , l'ACF des carrés vaut encore **0,82** au retard 20. C'est précisément la décroissance lente observée sur toutes les séries financières.

Le fait stylisé 4 n'est donc pas un fait supplémentaire : c'est la conséquence directe d'une persistance élevée.

## Le parallèle est complet

| Sur les carrés | Modèle sur $\varepsilon_t$ |
|----------------|----------------------------|
| MA(q)          | ARCH(q)                    |
| ARMA(1,1)      | GARCH(1,1)                 |

Un MA(q) a une mémoire strictement finie; un ARMA(1,1) a une mémoire infinie avec deux paramètres.  
Le passage de l'ARCH au GARCH **est** le passage du MA à l'ARMA.

Ce que la dualité permet de faire

---

### Une méthode pratique

Appliquer aux carrés des résidus la table d'identification du cours ARMA :

| ACF de $\hat{\varepsilon}_t^2$ | PACF de $\hat{\varepsilon}_t^2$ | Modèle         |
|--------------------------------|---------------------------------|----------------|
| coupe après $q$                | décroît                         | ARCH( $q$ )    |
| décroît                        | décroît                         | GARCH( $p,q$ ) |
|                                |                                 |                |

### Ce qu'on observe presque toujours

Les deux décroissent. C'est la signature du cas mixte — donc d'un GARCH, non d'un ARCH. Et comme dans le cours ARMA, l'ambiguïté sur  $p$  et  $q$  se tranche par les critères d'information.

### La tentation

Puisque c'est un ARMA, pourquoi ne pas l'estimer comme tel — par moindres carrés sur  $\hat{\varepsilon}_t^2$  ?

### Trois raisons de ne pas le faire

1.  $v_t$  est **fortement hétéroscédastique** : sa variance dépend de  $h_t^2$ . Les MCO sont alors très inefficaces.
2. Rien ne garantit que les estimations respectent  $\omega > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$ .
3. La loi de  $v_t$  est très asymétrique, ce qui dégrade encore l'inférence.

### À quoi cela sert quand même

À obtenir des **valeurs initiales** pour l'optimiseur du maximum de vraisemblance, et à comprendre pourquoi les logiciels convergent vite : ils partent d'un point déjà raisonnable.

## Synthèse

---

## L'essentiel du chapitre 9

- $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$  est un bruit blanc **hétéroscédastique** : la surprise de la variance.
- Un GARCH(1,1) sur  $\varepsilon_t$  **est** un ARMA(1,1) sur  $\varepsilon_t^2$ , de coefficient AR  $\alpha_1 + \beta_1$  et de coefficient MA  $-\beta_1$ .
- En général :  $\text{GARCH}(p,q) \iff \text{ARMA}(\max(p,q), p)$  sur les carrés.
- La condition  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$  et la décroissance en  $\pi^k$  de l'ACF s'en déduisent sans calcul nouveau.
- ARCH est à GARCH ce que MA est à ARMA.
- On **n'estime pas** par MCO sur les carrés :  $v_t$  est trop hétéroscédastique, et les contraintes ne seraient pas respectées.

## Vers le chapitre 10

La dynamique de  $h_t$  est réglée. Il reste la seconde moitié du modèle, laissée de côté depuis le chapitre 3 : la loi de  $z_t$ .