

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 6 : Détecter et identifier un effet ARCH



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

L'ordre des opérations

Le test ARCH de Engle

Identifier l'ordre

Une solution intermédiaire

Synthèse

Avant de commencer

La démarche de Box et Jenkins reste valable

Identifier, estimer, valider. La seule différence : on ne travaille plus sur r_t mais sur $\hat{\varepsilon}_t^2$ — les carrés des résidus de l'équation de moyenne.

L'ordre des opérations

Ne jamais commencer par la variance

La séquence obligatoire

1. Estimer et valider l'équation de moyenne (ARMA);
2. récupérer ses résidus $\hat{\varepsilon}_t$;
3. **puis seulement** examiner $\hat{\varepsilon}_t^2$.

Pourquoi cet ordre est impératif

Une autocorrélation de la moyenne non traitée se retrouve dans les résidus, et de là dans leurs carrés. On conclurait à un effet ARCH là où il n'y a qu'un AR mal spécifié.

Sur données financières quotidiennes, l'étape 1 aboutit presque toujours à $r_t = \theta + \varepsilon_t$ — mais il faut l'avoir vérifié.

Le test ARCH de Engle

Test du multiplicateur de Lagrange

Régresser le carré des résidus sur ses propres retards :

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = a_0 + a_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + a_m \hat{\varepsilon}_{t-m}^2 + u_t.$$

$$H_0 : a_1 = \cdots = a_m = 0 \quad (\text{homoscédasticité conditionnelle}).$$

La statistique est $T \cdot R^2 \sim \chi_m^2$ sous H_0 .

Pourquoi $T \cdot R^2$

Sous H_0 , aucun retard n'explique quoi que ce soit, donc $R^2 \approx 0$. Plus les carrés passés expliquent le carré présent, plus R^2 monte — et $T \cdot R^2$ avec lui. C'est la forme habituelle d'un test LM.

Résultat

$$T \cdot R^2 = 274,5 \quad \text{avec } m = 12, \quad p\text{-valeur} < 10^{-50}.$$

La valeur critique du χ^2_{12} à 5 % est 21,0. On rejette massivement.

Ce résultat est la règle, non l'exception

Sur des rentabilités quotidiennes, le test ARCH est **toujours** rejeté, quel que soit l'actif et quelle que soit la période. Un résultat non significatif doit faire soupçonner une erreur de manipulation — série mensuelle, échantillon trop court, ou données déjà lissées.

Une alternative équivalente en pratique

Appliquer la statistique de Ljung-Box du cours ARMA à la série $\hat{\varepsilon}_t^2$:

$$Q_{\text{LB}}(m) = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2(\hat{\varepsilon}^2)}{T-k} \sim \chi_m^2.$$

Sur les données du cours

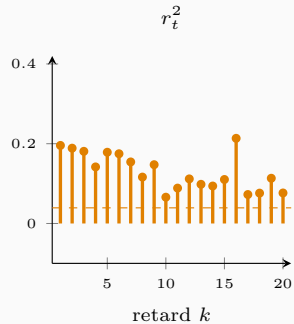
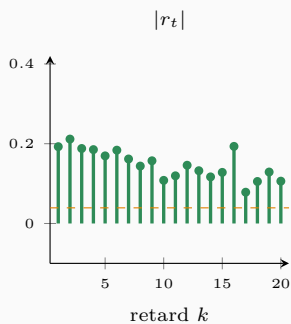
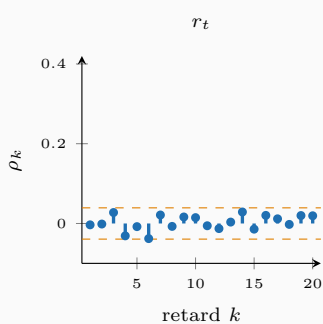
$Q_{\text{LB}}(20) = 968,1$ contre une valeur critique de 31,4.

Lequel employer

Les deux, et ils concordent presque toujours. Le test ARCH est plus **ciblé** — il teste la forme autorégressive précise du modèle; Ljung-Box est plus **général** — il détecte toute dépendance linéaire des carrés. Les logiciels affichent souvent les deux.

Identifier l'ordre

Le corrélogramme des carrés



Ce que le chapitre 5 permet d'en dire

Si ε_t^2 se comporte comme un AR, alors la **PACF** de ε_t^2 coupe après q retards — exactement comme celle d'un AR(p) coupait après p .

Sur données réelles, la lecture échoue presque toujours

La PACF des carrés ne coupe pas : elle s'étire. Ce n'est pas une anomalie — c'est le signe qu'il faudrait un q très élevé, donc que l'ARCH n'est pas le bon modèle.

Cette lecture ratée est en elle-même une information : elle annonce le GARCH.

La méthode qui fonctionne

Estimer les ARCH(q) pour $q = 1, \dots, 10$, et retenir le minimum de l'AIC ou du BIC — les critères du cours ARMA, appliqués à la log-vraisemblance du modèle de variance.

Le symptôme caractéristique

Le critère continue de décroître jusqu'à $q = 8, 10$, parfois davantage. Ce n'est pas que le vrai modèle soit un ARCH(10) : c'est qu'un ARCH d'ordre élevé **approche** une structure plus économe.

Un modèle qui exige dix paramètres pour représenter un phénomène simple est un modèle mal spécifié.

Ce qui se passe en pratique

Les contraintes butent. Il faut $\alpha_i \geq 0$ pour tout i ; l'optimiseur pousse plusieurs coefficients sur la borne zéro, et les écarts-types deviennent ininterprétables.

Les paramètres sont mal estimés. Dix coefficients sur les carrés de résidus — série très bruitée — donnent des estimations instables d'un sous-échantillon à l'autre.

Une solution intermédiaire

La proposition d'Engle lui-même (1982)

Imposer une décroissance linéaire des poids :

$$\alpha_i = \alpha \frac{q + 1 - i}{\sum_{j=1}^q (q + 1 - j)}, \quad i = 1, \dots, q.$$

Un seul paramètre α à estimer, quel que soit q .

Une bonne idée, à moitié

Le nombre de paramètres est ramené à un, et la positivité est acquise. Mais la forme de la décroissance est **imposée**, non estimée — et rien ne garantit que les données la suivent.

Bollerslev fera mieux : obtenir une décroissance **géométrique**, dont la vitesse est estimée, avec un seul paramètre supplémentaire.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 6

- **Toujours** valider l'équation de moyenne avant d'examiner les carrés des résidus.
- **Test ARCH de Engle** : régresser $\hat{\varepsilon}_t^2$ sur ses retards, $T \cdot R^2 \sim \chi_m^2$.
- **Ljung-Box sur les carrés** : plus général, mêmes conclusions en pratique.
- Sur données financières quotidiennes, le rejet est systématique et massif.
- La PACF des carrés devrait couper après q ; sur données réelles elle ne coupe pas.
- Les critères d'information poussent q vers 8 ou 10 : le signe qu'il faut changer de modèle.

Vers la partie III

Tous les indices convergent : il faut une mémoire longue avec peu de paramètres. La solution reprend exactement le procédé qui, dans le cours ARMA, faisait passer du MA au ARMA.