

Modélisation GARCH de la volatilité

Chapitre 2 : Regroupement de la volatilité et effet de levier



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Le regroupement de la volatilité

L'effet de levier

La gaussianité par agrégation

Synthèse

Avant de commencer

Deux faits qui commandent tout le reste

Le regroupement décide de la **forme** du modèle. L'effet de levier décide de sa **symétrie**. Ce sont les deux seules décisions de spécification que ce cours aura à prendre.

Le regroupement de la volatilité

Volatility clustering

La probabilité d'une grande variation demain est **plus élevée** si une grande variation vient de se produire. Formellement :

$$\text{Corr}(r_t^2, r_{t-k}^2) > 0 \quad \text{et décroît lentement en } k.$$

Ce que ce n'est pas

Ce n'est **pas** une corrélation des rentabilités : le signe reste imprévisible. Après une forte baisse, il est plus probable que demain bouge beaucoup — pas qu'il baisse.

Amplitude prévisible, direction imprévisible : les deux affirmations sont parfaitement compatibles.

Pourquoi la volatilité se regroupe

- **L'arrivée de l'information.** Les nouvelles ne tombent pas régulièrement : elles se concentrent — résultats trimestriels, décisions de banque centrale, crises. La volatilité suit le rythme de l'information, non celui du calendrier.
- **L'hétérogénéité des horizons.** Un choc met du temps à se propager du trader intrajournalier au gérant de fonds de pension. Chacun réagit à son rythme, ce qui étale la réaction.
- **Les contraintes de financement.** Une baisse déclenche des appels de marge, qui forcent des ventes, qui font baisser les prix. Le mécanisme s'auto-entretient tant que le désendettement dure.

Une conséquence directe : les queues épaisses

Un mélange de lois normales n'est pas normal

Supposons que chaque jour la rentabilité soit gaussienne, mais avec une variance qui change de jour en jour. La loi **inconditionnelle** est alors un mélange de gaussiennes de variances différentes.

Le résultat, et il est essentiel

Un mélange de lois normales a **toujours** un kurtosis supérieur à 3. Les jours de forte variance produisent des valeurs extrêmes que la variance moyenne ne laissait pas attendre.

Autrement dit : le fait 2 — les queues épaisses — n'est pas un fait indépendant. **Il découle du fait 3.** Un modèle qui capture le regroupement produit les queues épaisses gratuitement.

Un calcul en trois lignes

Rentabilités brutes : kurtosis = 6,05.

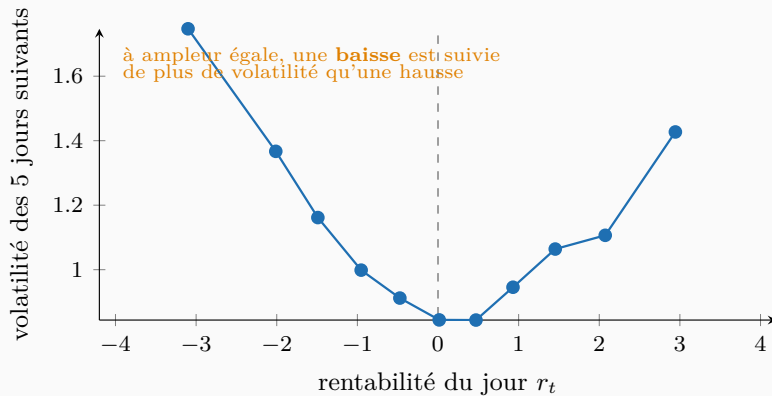
Rentabilités divisées par leur volatilité conditionnelle estimée, $z_t = r_t / \sqrt{h_t}$: kurtosis = 4,66.

Une bonne part de l'épaisseur des queues a disparu — celle qui venait du seul regroupement. Ce qui reste tiendra à la loi des innovations, et fera l'objet du chapitre 10.

L'effet de levier

Asymétrie de la réaction (Black, 1976)

À ampleur égale, une **baisse** des cours fait davantage monter la volatilité future qu'une hausse.



Lecture de la figure

Aucun modèle n'intervient ici : on classe simplement les journées selon leur rentabilité, et l'on regarde la volatilité réalisée des cinq jours suivants. La branche de gauche monte plus vite que celle de droite — l'écart moyen est de **19 %** sur ce jeu de données, et couramment de 30 à 50 % sur des indices réels.

L'explication de Black : le levier financier

Une entreprise financée par dette et fonds propres a un levier D/E . Si le cours de l'action baisse, E diminue tandis que D reste inchangé : le levier **augmente** mécaniquement.

Or plus le levier est élevé, plus la rentabilité des fonds propres est volatile. Une baisse rend donc l'action structurellement plus risquée.

Une explication insuffisante

L'effet de levier s'observe aussi sur les **indices**, sur les **taux de change** et sur les **matières premières** — où la notion de levier d'entreprise n'a aucun sens. L'ampleur observée dépasse d'ailleurs largement ce que le mécanisme comptable justifierait.

Le retour de volatilité (volatility feedback)

La causalité est **inversée** : c'est la hausse anticipée de la volatilité qui fait baisser les cours. Si les investisseurs anticipent plus de risque, ils exigent une prime plus élevée, donc paient moins cher aujourd'hui.

Comment trancher — et pourquoi cela importe peu ici

Départager les deux mécanismes demande des données intrajournalières et reste débattu. Pour la modélisation, la question est sans conséquence : **le fait est là**, et il faut un modèle asymétrique. Les chapitres 11 et 12 en proposeront trois.

Une contrainte de spécification

Un modèle où la variance ne dépend du choc que par son **carré** — donc par ε_{t-1}^2 — est nécessairement symétrique : **+2** et **−2** y produisent exactement le même effet.

C'est le cas de l'ARCH et du GARCH. Ils reproduiront les faits 1 à 4, et **échoueront** sur le fait 5. C'est cet échec qui motivera les extensions.

La gaussianité par agrégation

Le sixième fait

Aggregational gaussianity

Plus l'horizon s'allonge — du jour à la semaine, au mois, au trimestre — plus la loi des rentabilités se rapproche de la normale, et plus le kurtosis se rapproche de 3.

Pourquoi c'est cohérent avec tout le reste

Une rentabilité mensuelle est la somme d'une vingtaine de rentabilités quotidiennes. Le théorème central limite s'applique — imparfaitement, car ces variables ne sont pas indépendantes, ce qui explique que la convergence soit **lente**.

Un fait qu'on ne peut pas vérifier sur 2 000 observations

Estimer un kurtosis demande beaucoup de données; en estimer plusieurs, à différents horizons, en demande énormément. Sur dix ans de cotations quotidiennes, l'estimation à l'horizon mensuel repose sur 120 points : trop peu.

C'est un fait établi sur des séries longues — plusieurs décennies. Nous le prenons ici pour acquis, sans prétendre le démontrer.

La volatilité se modélise là où elle bouge

À l'horizon quotidien, la dynamique de la volatilité domine : c'est là que le GARCH est indispensable. À l'horizon annuel, elle s'est largement moyennée, et l'hypothèse gaussienne redevient acceptable.

C'est pourquoi la réglementation bancaire raisonne en VaR à **un ou dix jours**, et non à un an.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 2

- **Regroupement** : r_t^2 est autocorrélé et décroît lentement. Amplitude prévisible, direction imprévisible.
- Trois causes : arrivée groupée de l'information, hétérogénéité des horizons, contraintes de financement.
- Les **queues épaisses découlent du regroupement** : un mélange de gaussiennes a un kurtosis supérieur à 3.
- **Effet de levier** : une baisse fait plus monter la volatilité qu'une hausse de même ampleur.
- Deux explications concurrentes — levier financier, retour de volatilité — mais un seul enjeu de modélisation : il faut de l'**asymétrie**.
- Un modèle en ε_{t-1}^2 est symétrique par construction : il ne pourra pas capter le fait 5.

Vers le chapitre 3

Il reste à poser le cadre : comment écrire un modèle où la variance change à chaque date sans que le processus cesse d'être stationnaire.