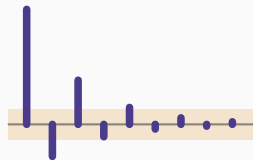


Modélisation ARMA des rentabilités financières

Chapitre 2 : La stationnarité



Avant de commencer

La stationnarité stricte

La stationnarité au sens faible

Pourquoi la stationnarité est indispensable

Synthèse

Avant de commencer

Une seule trajectoire observée. Pour en tirer quoi que ce soit, il faut que le processus se répète d'une certaine manière au fil du temps. Reste à dire laquelle.

La stationnarité stricte

Stationnarité stricte (ou forte)

Le processus (y_t) est strictement stationnaire si, pour tout k et toute suite de dates $t_1, \dots, t_n$, la loi jointe de

$$(y_{t_1}, \dots, y_{t_n}) \quad \text{et celle de} \quad (y_{t_1+k}, \dots, y_{t_n+k})$$

sont **identiques**. Décaler l'origine du temps ne change rien.

Pourquoi on ne s'en sert pas

Cette définition porte sur des lois entières, qu'on n'observe jamais. Elle est invérifiable en pratique. On lui préfère une version qui ne contraint que les deux premiers moments.

La stationnarité au sens faible

Stationnarité au sens faible (ou du second ordre)

Le processus (y_t) est stationnaire au sens faible si :

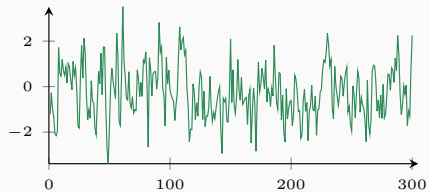
1. $E(y_t) = \mu$, **constante** — indépendante de t ;
2. $V(y_t) = \sigma^2 < \infty$, **constante**;
3. $\text{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k$ ne dépend **que de l'écart k** , jamais de la date t .

Ce que chacune interdit

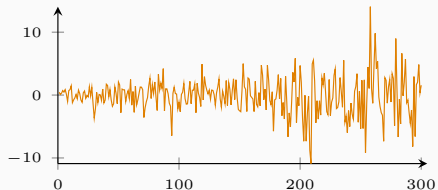
- (1) interdit la **tendance** : la série ne dérive pas.
- (2) interdit la **variance changeante** : l'amplitude des fluctuations reste stable. C'est celle qui posera problème sur les rentabilités.
- (3) interdit que le **lien entre deux dates** dépende du moment où l'on regarde : la corrélation entre janvier et février doit être celle entre juillet et août.

Quatre séries, une seule stationnaire

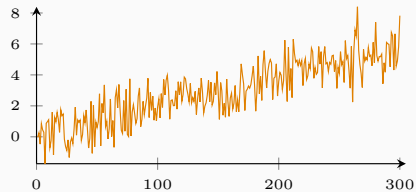
stationnaire : AR(1), $\phi = 0,5$



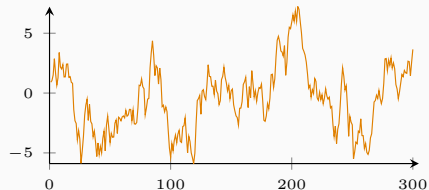
variance qui varie



espérance qui varie : tendance



marche aléatoire : $\phi = 1$



Diagnostic à l'œil

En haut à gauche, la série oscille autour d'un niveau fixe avec une amplitude stable : rien ne s'y oppose. Les trois autres violent respectivement la condition (1), la condition (2), et — pour la marche aléatoire — les conditions (2) et (3) à la fois.

Les implications

- Stationnarité **stricte** + moments d'ordre 2 finis $\Rightarrow$ stationnarité **faible**.
- La réciproque est **fausse** en général.
- Elle devient vraie dans le cas **gaussien** : une loi normale est entièrement déterminée par sa moyenne et sa variance.

Ce que « faible » veut dire au juste

« Faible » ne veut pas dire approximatif. Cela veut dire : on ne contraint que l'espérance, la variance et les covariances. Tout le reste de la loi — asymétrie, épaisseur des queues — est laissé libre. C'est précisément ce qui permettra aux rentabilités d'être stationnaires **et** d'avoir des queues épaisses.

Pourquoi la stationnarité est
indispensable

Ergodicité

Un processus stationnaire est **ergodique** pour la moyenne si

$$\bar{y}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \mu.$$

La moyenne calculée le long d'**une** trajectoire converge vers l'espérance du processus.

Le rôle exact des deux notions

La **stationnarité** garantit qu'il existe un μ unique à estimer. L'**ergodicité** garantit qu'on peut l'atteindre en moyennant dans le temps. Ensemble, elles remplacent les répétitions dont on ne dispose pas.

La régression fallacieuse

Deux séries indépendantes, chacune munie d'une tendance, présentent un R^2 élevé et des coefficients très significatifs — alors qu'aucun lien ne les unit. Le problème n'est pas la faiblesse du test, c'est que ses hypothèses sont violées : la statistique de Student ne suit plus la loi qu'on lui prête.

La règle de travail

On ne modélise **jamais** une série non stationnaire par un ARMA. On la stationnarise d'abord — et le chapitre 8 dira comment.

Pourquoi les rentabilités et non les prix

Un cours de bourse n'est pas stationnaire : il n'a pas de niveau d'ancrage, et sa variance croît avec l'horizon. Sa **différence logarithmique** — la rentabilité — l'est approximativement : elle oscille autour de zéro, sans tendance.

Le passage au logarithme puis à la différence

P_t non stationnaire $\longrightarrow r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$ stationnaire en moyenne.

Une réserve, à garder en tête

« Stationnaire en moyenne » ne veut pas dire stationnaire tout court. La condition (2) — variance constante — est douteuse sur données financières. C'est exactement le point sur lequel le cours s'achèvera, et qui appellera les modèles GARCH.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 2

- La stationnarité **stricte** porte sur les lois jointes : invérifiable en pratique.
- La stationnarité **faible** impose trois conditions : espérance constante, variance constante et finie, covariance ne dépendant que du décalage.
- Elle rend l'inférence possible à partir d'une trajectoire unique; l'**ergodicité** en assure la convergence.
- Une série non stationnaire doit être transformée avant toute modélisation ARMA.
- Les rentabilités sont stationnaires en moyenne; leur variance, elle, pose question.

Vers le chapitre 3

Il nous faut maintenant un exemple de processus stationnaire — le plus simple possible, celui qui servira de brique à tous les modèles du cours. C'est le bruit blanc.