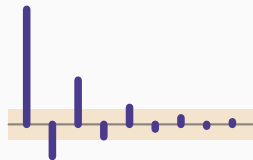


Modélisation ARMA des rentabilités financières

Chapitre 9 : Les tests de racine unitaire



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Le test de Dickey-Fuller

Le test augmenté (ADF)

Le test de Phillips-Perron

Le test KPSS

Croiser les conclusions

Synthèse

Avant de commencer

Le chapitre 8 a donné la condition : toutes les racines hors du cercle unité. Mais les α_i ne sont pas connus — on ne dispose que d'estimations. Il faut donc **tester** la présence d'une racine unitaire, et non la constater.

Ce qui rend ce test particulier

Sous H_0 de racine unitaire, la série n'est **pas stationnaire**. Les résultats asymptotiques habituels tombent : la statistique de Student ne suit plus une loi de Student, même pour T très grand. Il faudra des tables spéciales.

Le test de Dickey-Fuller

Partons d'un AR(1) sans constante :

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Tester $\alpha = 1$ revient, en retranchant y_{t-1} des deux côtés, à tester $\varphi = 0$ dans

$$\Delta y_t = \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varphi = \alpha - 1.$$

Hypothèses

$H_0 : \varphi = 0$ (racine unitaire, série $I(1)$) contre $H_1 : \varphi < 0$ (stationnaire).

Il faut choisir, et le choix compte

1. Sans constante ni tendance : $\Delta y_t = \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t$
2. Avec constante : $\Delta y_t = \theta + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t$
3. Avec constante et tendance : $\Delta y_t = \theta + \delta t + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t$

La règle de choix

Le modèle doit contenir les composantes déterministes présentes **sous** H_1 . Une série qui oscille autour d'une moyenne non nulle exige le modèle 2; une série avec tendance visible, le modèle 3.

Se tromper coûte cher : omettre une constante nécessaire fait perdre presque toute la puissance du test.

Pourquoi les tables usuelles ne valent pas

La distribution de Dickey-Fuller

Sous H_0 , la statistique

$$\tau = \frac{\hat{\varphi}}{\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}}}$$

ne suit **pas** une loi de Student, mais une loi non standard, tabulée par simulation (Dickey et Fuller, 1979).

Les valeurs critiques au seuil de 5 pour cent, pour T grand

Spécification	Valeur critique	Student
sans constante	−1,95	−1,65
avec constante	−2,86	−1,65
avec tendance	−3,41	−1,65

Employer −1,65 conduirait à rejeter la racine unitaire beaucoup trop souvent.

D'où vient cette dissymétrie

Sous H_0 , la variance de y_{t-1} croît avec t . Le régresseur n'est plus stationnaire, la théorie asymptotique classique ne s'applique plus, et $\hat{\varphi}$ converge à la vitesse T au lieu de $\sqrt{T}$ – on parle de convergence *super-consistante*.

Le test augmenté (ADF)

Une hypothèse restrictive

Le test de Dickey-Fuller suppose que ε_t est un **bruit blanc**. Si la série contient une dynamique ARMA, les résidus sont autocorrélés, et le test est biaisé.

Dickey-Fuller augmenté

On ajoute des différences retardées, en nombre suffisant pour blanchir le résidu :

$$\Delta y_t = \theta + \delta t + \varphi y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t.$$

On teste toujours $H_0 : \varphi = 0$, avec les **mêmes** valeurs critiques.

Choisir k

Trop petit : les résidus restent autocorrélés, le test est faussé. Trop grand : on perd de la puissance. En pratique on retient le k qui minimise l'AIC ou le BIC, ou la règle de Schwert $k_{\max} = \lfloor 12(T/100)^{1/4} \rfloor$, puis on retire les retards non significatifs.

Le test de Phillips-Perron

Une autre façon de traiter le problème

Phillips et Perron (1988)

Plutôt que d'ajouter des retards, on estime la régression **simple** de Dickey-Fuller et l'on corrige la statistique elle-même, au moyen d'un estimateur non paramétrique de la variance de long terme des résidus (Newey-West).

La différence de philosophie

ADF **modélise** l'autocorrélation résiduelle en l'absorbant dans la régression. Phillips-Perron la **laisse** et corrige le résultat après coup. Les valeurs critiques sont identiques; les conclusions coïncident le plus souvent.

Quand les préférer l'un à l'autre

Phillips-Perron est plus robuste à l'hétéroscédasticité — argument sérieux en finance. Mais il se comporte mal en présence d'une composante MA fortement négative, où il rejette beaucoup trop. ADF reste le test de référence; PP sert de contrôle.

Le test KPSS

Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin (1992)

H_0 : la série est **stationnaire** contre H_1 : racine unitaire.

C'est exactement l'inverse de DF, ADF et PP.

Pourquoi cette inversion est utile

Un test ne prouve jamais son hypothèse nulle : il échoue seulement à la rejeter. Avec ADF, ne pas rejeter H_0 ne prouve pas la présence d'une racine unitaire — cela peut simplement signaler un manque de puissance.

En inversant les rôles, KPSS met la stationnarité à l'épreuve. **Les deux tests se complètent**, ils ne se remplacent pas.

On décompose la série en tendance, marche aléatoire et bruit :

$$y_t = \delta t + \xi_t + u_t, \quad \xi_t = \xi_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim \text{WN}(0, \sigma_v^2).$$

L'hypothèse testée

$H_0 : \sigma_v^2 = 0$ – la composante de marche aléatoire est absente. La statistique repose sur la somme cumulée des résidus :

$$\text{KPSS} = \frac{1}{T^2 \hat{\sigma}_{\text{LR}}^2} \sum_{t=1}^T S_t^2, \quad S_t = \sum_{i=1}^t \hat{u}_i.$$

La lecture

Si la série est stationnaire, ses résidus se compensent et la somme cumulée reste petite. Si elle contient une marche aléatoire, la somme cumulée diverge et la statistique explose. **On rejette pour des valeurs élevées.**

Croiser les conclusions

Ce qu'il faut conclure selon les deux tests

ADF	KPSS	Conclusion
rejette H_0	ne rejette pas	stationnaire , sans ambiguïté
ne rejette pas	rejette	racine unitaire , sans ambiguïté
ne rejette pas	rejette aussi...	échantillon peu informatif
rejette	rejette aussi	mauvaise spécification ou rupture

Les deux cas ambigus

Ligne 3 : aucun des deux tests ne tranche — les données ne contiennent pas assez d'information, il faut allonger l'échantillon.

Ligne 4 : les deux rejettent, ce qui est contradictoire. Le plus souvent, la série comporte une **rupture structurelle** que les tests interprètent à tort comme une racine unitaire.

Perron (1989)

Une série stationnaire autour d'une moyenne qui change **une fois** de niveau est très souvent déclarée $I(1)$ par ADF. Le test confond changement de régime et racine unitaire.

Le remède existe — tests à rupture endogène de Zivot-Andrews — mais la première précaution est de **regarder la série** avant de tester.

Le résultat, régulier

Série	ADF	KPSS	Conclusion
$\ln P_t$ (log-prix)	ne rejette pas	rejette	$I(1)$
$r_t = \Delta \ln P_t$	rejette nettement	ne rejette pas	$I(0)$

Ce que cela justifie enfin

Travailler sur les rentabilités plutôt que sur les prix n'est pas une convention de métier : c'est le résultat d'un test. Et il place le prix exactement là où le cours de calcul stochastique le suppose — une marche aléatoire.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 9

- Sous racine unitaire, la statistique de Student ne suit **pas** une loi de Student : tables spéciales.
- **DF** : $\Delta y_t = \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t$, $H_0 : \varphi = 0$. Trois spécifications selon les composantes déterministes.
- **ADF** ajoute des différences retardées pour blanchir le résidu ; mêmes valeurs critiques.
- **Phillips-Perron** corrige la statistique au lieu d'augmenter la régression ; plus robuste à l'hétéroscédasticité.
- **KPSS** inverse l'hypothèse nulle : H_0 est la stationnarité. À croiser systématiquement avec ADF.
- Une rupture structurelle se fait passer pour une racine unitaire : regarder la série avant de tester.

Vers le chapitre 10

La série est stationnaire, ou l'a été rendue. Nous pouvons enfin calculer ce que les modèles prédisent : moments, autocovariances, et la signature qui permettra de les reconnaître.