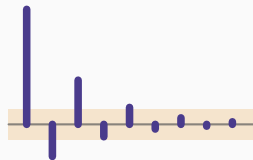


Modélisation ARMA des rentabilités financières

Chapitre 1 : Variable aléatoire et processus stochastique



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Prérequis

Avant de commencer

Rappel : la variable aléatoire

Du hasard au processus

Synthèse

Prérequis

Les cours qui précèdent

Les *Probabilités* de Licence, et les chapitres de séries temporelles de l'*Économétrie avancée*.

Les notions mobilisées

Variable aléatoire, espérance, variance, covariance, loi normale. Le processus **AR**, la **marche aléatoire**, la **racine unitaire** et la régression fallacieuse.

Repris à sa manière

Le cours **reconstruit** ces notions dans son propre langage — stationnarité, autocovariance, opérateur retard — mais suppose qu'elles ne sont pas découvertes ici.

Un étudiant qui n'aurait jamais vu un processus AR devrait lire d'abord les chapitres de séries temporelles de l'économétrie avancée.

Avant de commencer

Une seule question, posée sur une série de rentabilités boursières :

La question

La rentabilité d'aujourd'hui aide-t-elle à prévoir celle de demain ? Et si oui, jusqu'à quel horizon ?

Répondre suppose de construire un cadre. Ce chapitre pose la brique de base : l'idée qu'une série observée est **une réalisation parmi d'autres** d'un objet aléatoire.

Rappel : la variable aléatoire

Variable aléatoire

Une application X qui associe un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire. Elle est entièrement décrite par sa **loi de probabilité**.

Les grandeurs qui nous serviront :

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sigma^2.$$

Ce qu'est une rentabilité

La rentabilité d'un actif entre $t - 1$ et t n'est pas connue à l'avance : c'est une variable aléatoire. On la mesure le plus souvent en logarithme,

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1},$$

parce que les rentabilités logarithmiques s'additionnent dans le temps.

Covariance et corrélation

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)], \quad \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1, 1].$$

Pourquoi ce rappel est le bon point de départ

Toute la première moitié du cours consiste à calculer la corrélation entre y_t et y_{t-k} — la variable **avec elle-même**, décalée dans le temps. C'est ce qu'on appellera l'autocorrélation, et c'est la mesure de la mémoire.

Du hasard au processus

Processus stochastique

Une **famille de variables aléatoires** $(y_t)_{t \in T}$ indexée par le temps, définies sur un même espace probabilisé.

Le changement d'objet

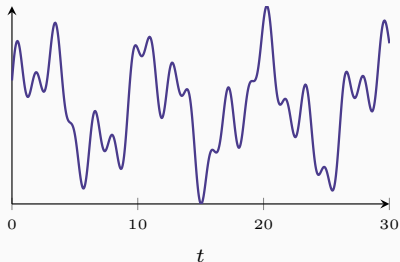
On ne manipule plus une variable aléatoire, mais une infinité — une par date. Le hasard ne porte plus sur un nombre, il porte sur une **trajectoire entière**.

Deux cas selon l'ensemble d'indices T

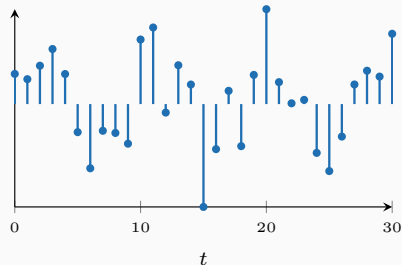
- $T = \mathbb{R}^+$: **temps continu**. Le processus a une valeur à chaque instant. C'est l'objet du **calcul stochastique** — mouvement brownien, équations différentielles stochastiques.
- $T = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$: **temps discret**. Le processus n'est observé qu'à des dates régulières. On parle alors de **série temporelle**, ou série chronologique.

Les deux régimes, côte à côte

temps continu : $t \in \mathbb{R}^+$



temps discret : $t \in \mathbb{Z}$



Lequel choisir? La question ne se pose pas

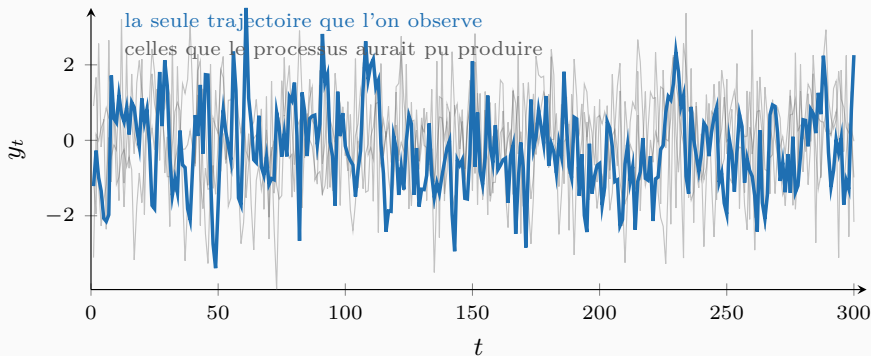
Le calcul stochastique modélise le **prix**, qui cote en continu, et sert à évaluer des produits dérivés. La modélisation ARMA travaille sur les **rentabilités** relevées à intervalle fixe — clôture quotidienne, hebdomadaire, mensuelle. Ce sont deux lectures du même marché, à deux échelles.

Ce que « série temporelle » veut dire exactement

Processus et réalisation

Le **processus** (y_t) est l'objet théorique : une loi sur les trajectoires. La **série temporelle** $y_1, y_2, \dots, y_T$ est ce que l'on observe : **une seule** trajectoire, tirée une fois.

Le problème fondamental de la discipline



La difficulté, et elle est sérieuse

En statistique classique, on dispose de n tirages indépendants d'une même variable, et l'on estime sa moyenne. Ici, pour chaque date t , on ne dispose que **d'une seule** observation de y_t . Comment estimer $E(y_t)$ avec un tirage ?

La réponse : remplacer la répétition par la régularité

L'idée qui rend tout possible

Si le processus se comporte **de la même façon à toutes les dates**, alors les observations successives $y_1, \dots, y_T$ peuvent jouer le rôle des répétitions manquantes. Moyenner **dans le temps** revient à moyenner **entre trajectoires**.

Le nom de cette régularité

C'est la **stationnarité**. Ce n'est pas une hypothèse technique commode : c'est ce qui autorise l'inférence à partir d'une trajectoire unique. Tout le chapitre 2 lui est consacré.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 1

- Une variable aléatoire est décrite par sa loi; E , V et Cov en résument l'essentiel.
- Un **processus stochastique** est une famille de variables aléatoires indexée par le temps.
- Temps **continu** : calcul stochastique. Temps **discret** : séries temporelles — l'objet de ce cours.
- Une série observée est **une seule réalisation** d'un processus.
- Une observation par date : l'inférence n'est possible que si le processus est régulier dans le temps.

Vers le chapitre 2

Il faut donc dire précisément ce que « se comporter de la même façon à toutes les dates » signifie. Trois conditions suffiront — et elles définiront la stationnarité au sens faible.