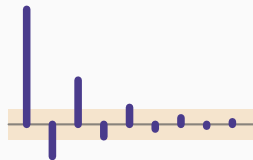


Modélisation ARMA des rentabilités financières

Chapitre 6 : Les processus de moyenne mobile
 $MA(q)$



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Le processus $MA(1)$

Le processus $MA(q)$

L'inversibilité

AR et MA : la dualité

Synthèse

Avant de commencer

Deux façons de porter la mémoire

L'AR fait dépendre la série de **ses propres valeurs** passées. Le MA la fait dépendre des **chocs** passés. Dans un cas, on se souvient d'où l'on était; dans l'autre, de ce qui est arrivé.

Le processus MA(1)

MA(1)

$$y_t = \theta + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Pourquoi « moyenne mobile »

La série est une moyenne pondérée d'un petit nombre de chocs consécutifs — une fenêtre qui glisse le long de la suite des innovations. Le nom vient de là, et non d'une moyenne au sens statistique.

$$y_t = \theta + (1 + \beta L) \varepsilon_t$$

Écriture compacte

$$y_t = \theta + B(L) \varepsilon_t, \quad B(L) = 1 + \beta L.$$

Le contraste d'écriture avec l'AR est instructif : là, le polynôme s'appliquait à y ; ici il s'applique au **bruit**.

Le trait caractéristique

y_t et y_{t-1} partagent le choc ε_{t-1} : ils sont corrélés.

y_t et y_{t-2} ne partagent **aucun** choc : ils sont non corrélés, exactement.

La conséquence, et elle est spectaculaire

L'autocorrélation d'un MA(1) est nulle **à partir du retard 2**, sans décroissance progressive : elle tombe d'un coup. C'est une signature graphique parfaitement reconnaissable, et c'est elle qui permettra d'identifier q au chapitre 12.

Le processus MA(q)

MA(q)

$$y_t = \theta + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{t-q} = \theta + B(L) \varepsilon_t,$$

$$B(L) = 1 + \sum_{j=1}^q \beta_j L^j, \quad \boxed{\beta_q \neq 0}.$$

La mémoire s'éteint **exactement** après q périodes : $\rho_k = 0$ pour tout $k > q$.

Un résultat immédiat

Un MA(q) est **toujours** stationnaire au sens faible, quelles que soient les valeurs des β_j .

La démonstration tient en deux lignes :

$$E(y_t) = \mu \quad (\text{constante}), \quad V(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \sum_{j=1}^q \beta_j^2 \right) \quad (\text{constante, finie}).$$

Pourquoi c'est évident, au fond

Une somme **finie** de variables non corrélées de variance finie a nécessairement une variance finie.
Aucun mécanisme d'accumulation n'est en jeu : il n'y a rien à faire diverger.

L'inversibilité

Deux modèles, une seule autocorrélation

Pour un MA(1), on montrera au chapitre 10 que

$$\rho_1 = \frac{\beta}{1 + \beta^2}.$$

Or $\beta = 0,5$ et $\beta = 2$ donnent tous deux $\rho_1 = 0,4$. Les deux modèles sont **indiscernables** par leurs autocorrélations.

Il faut donc trancher

Sans règle supplémentaire, l'estimation n'aurait pas de solution unique. La convention consiste à retenir celui des deux qui est inversible.

Inversibilité

Un MA(q) est inversible si les racines de $B(z) = 0$ sont de module **strictement supérieur à 1**. Pour un MA(1), cela revient à $|\beta| < 1$.

Sous cette condition, on peut inverser $B(L)$ et écrire :

$$B(L)^{-1}y_t = \varepsilon_t \quad \Longleftrightarrow \quad y_t = -\sum_{j \geq 1} \pi_j y_{t-j} + \varepsilon_t.$$

Ce que l'inversibilité signifie vraiment

Une exigence de bon sens

Un modèle inversible peut se réécrire en $AR(\infty)$: le choc actuel s'exprime en fonction du **passé observable** de la série. Sans inversibilité, ε_t dépendrait du futur — et l'on ne pourrait ni l'estimer, ni prévoir.

La symétrie qui organise le cours

	Condition	Ce qu'elle permet
AR	stationnarité	réécrire en $MA(\infty)$
MA	inversibilité	réécrire en $AR(\infty)$

Les deux conditions sont la même, appliquée à l'un ou l'autre polynôme : racines hors du cercle unité.

AR et MA : la dualité

Deux familles en miroir

	AR(p)	MA(q)
Écriture	$A(L)y_t = \varepsilon_t$	$y_t = B(L)\varepsilon_t$
Dépend de	ses valeurs passées	les chocs passés
Mémoire	infinie, décroissante	finie, coupée après q
Stationnarité	sous condition	toujours
Inversibilité	toujours	sous condition
Autre écriture	MA(∞)	AR(∞)

La dualité, en une phrase

Un AR stationnaire est un MA infini ; un MA inversible est un AR infini. Ce sont deux angles sur le même objet — un filtre linéaire appliqué à un bruit blanc.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 6

- $MA(q) : y_t = \theta + B(L)\varepsilon_t$, une somme finie de chocs passés.
- Sa mémoire s'éteint exactement après q retards : $\rho_k = 0$ pour $k > q$.
- Il est **toujours** stationnaire — somme finie de termes non corrélés.
- L'**inversibilité** ($|\beta| < 1$ pour un $MA(1)$) lève l'ambiguïté de l'estimation et permet la réécriture en $AR(\infty)$.
- AR et MA sont duaux : chacun est la forme infinie de l'autre.

Vers le chapitre 7

Reste à combiner les deux. Non par goût de la généralité, mais par économie : un ARMA fait souvent avec deux paramètres ce qu'un AR pur exigerait d'en estimer huit.