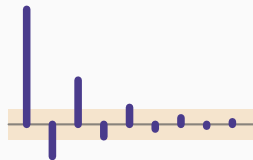


Modélisation ARMA des rentabilités financières

Chapitre 5 : Les processus autorégressifs AR(p)



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Le processus AR(1)

Le processus AR(p)

Synthèse

Avant de commencer

Le principe autorégressif

La série s'explique par **son propre passé**. « Auto » : la variable est régressée sur elle-même ; « régressif » : par une relation linéaire, comme dans une régression ordinaire.

Le processus AR(1)

AR(1)

$$y_t = \theta + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Trois éléments, et un seul est nouveau : la constante c fixe le niveau, le terme αy_{t-1} porte la mémoire, le bruit ε_t apporte la nouveauté de la période — on l'appelle aussi l'**innovation**.

Lire α

C'est le coefficient de persistance : la fraction de l'écart d'hier qui se retrouve aujourd'hui. Un choc reçu à la date t subsiste α fois à la date suivante, α^2 deux périodes plus tard, et ainsi de suite.

En passant le terme retardé à gauche :

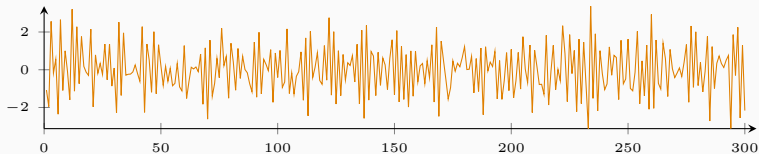
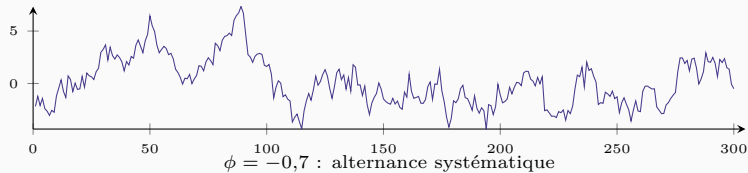
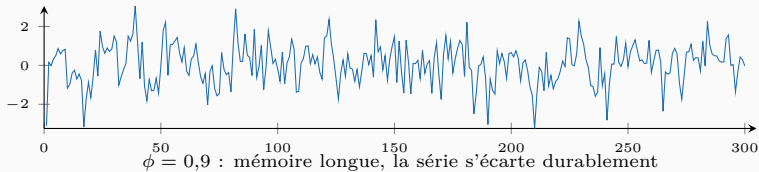
$$y_t - \alpha y_{t-1} = \theta + \varepsilon_t \quad \Longleftrightarrow \quad (1 - \alpha L) y_t = \theta + \varepsilon_t$$

Écriture compacte

$$A(L) y_t = \theta + \varepsilon_t, \quad A(L) = 1 - \alpha L.$$

Ce que α change, visuellement

$\phi = 0,3$: mémoire courte



Les bornes

- $\alpha = 0$: $y_t = \theta + \varepsilon_t$. Le bruit blanc est un AR(1) sans mémoire.
- $\alpha = 1$: $y_t = \theta + y_{t-1} + \varepsilon_t$. C'est la **marche aléatoire** — non stationnaire.
- $|\alpha| > 1$: les chocs sont amplifiés à chaque période, la série explose.

Le cas $\alpha = 1$ mérite son nom

La marche aléatoire est le modèle de référence du prix d'un actif efficient : la meilleure prévision de demain est la valeur d'aujourd'hui. Elle sépare les processus stationnaires ($|\alpha| < 1$) des processus explosifs, et c'est elle que testent les tests de racine unitaire.

Le processus AR(p)

AR(p)

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \boxed{\alpha_p \neq 0}.$$

L'ordre p est le nombre de retards retenus : c'est la profondeur de mémoire **directe** du modèle.

Pourquoi exiger $\alpha_p \neq 0$

Sans cette condition, l'ordre ne serait pas défini. Un AR(3) dont $\alpha_3 = 0$ **est** un AR(2), et rien d'autre. La contrainte fait de p le plus petit ordre qui décrive le processus — c'est ce qui donne un sens à la question « quel est l'ordre ? », et donc à toute l'étape d'identification.

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p) y_t = \theta + \varepsilon_t$$

Écriture compacte

$$A(L) y_t = \theta + \varepsilon_t, \quad A(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i.$$

Le gain de la notation

Quel que soit p , un seul objet : le polynôme A . Toutes les propriétés de la famille se liront sur lui — c'est ce qui permet d'énoncer une règle unique au chapitre 8, plutôt qu'une condition par valeur de p .

Un AR(1) se souvient de tout

Dans un AR(1), y_t ne dépend directement que de y_{t-1} . Mais y_{t-1} dépend de y_{t-2} , qui dépend de y_{t-3} ... La dépendance se transmet de proche en proche.

Une distinction qui reviendra

y_t et y_{t-2} sont corrélés dans un AR(1), mais **uniquement à travers** y_{t-1} . Si l'on neutralise y_{t-1} , il ne reste rien. C'est exactement ce que mesurera l'autocorrélation **partielle**, au chapitre 11 — et c'est ce qui permettra de lire p sur un graphique.

En inversant le polynôme, comme au chapitre 4 :

$$y_t = \frac{\theta}{A(1)} + A(L)^{-1}\varepsilon_t = \mu + \sum_{j \geq 0} \psi_j \varepsilon_{t-j}.$$

La double lecture d'un AR

Écrit avec p paramètres, il contient en réalité **une infinité** de coefficients ψ_j . C'est ce qui fait la force du modèle autorégressif : une mémoire infinie, résumée par très peu de nombres.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 5

- AR(1) : $y_t = \theta + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$, soit $(1 - \alpha L)y_t = \theta + \varepsilon_t$.
- α mesure la persistance ; un choc survit en α^k après k périodes.
- $\alpha = 0$: bruit blanc. $\alpha = 1$: marche aléatoire. $|\alpha| > 1$: explosif.
- AR(p) : $A(L)y_t = \theta + \varepsilon_t$ avec $A(L) = 1 - \sum \alpha_i L^i$.
- Un AR admet une représentation MA infinie : peu de paramètres, mémoire illimitée.

Vers le chapitre 6

La famille symétrique fait le choix inverse : expliquer la série non par son passé, mais par les **chocs** passés. Une mémoire finie, cette fois, et parfaitement contrôlée.