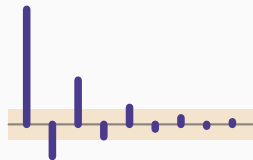


Modélisation ARMA des rentabilités financières

Chapitre 4 : L'opérateur retard et l'écriture polynomiale



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

L'opérateur

Les polynômes de retard

Inverser un polynôme de retard

Synthèse

Avant de commencer

Le pari de ce chapitre

On peut écrire tous les modèles du cours sans cet outil. Mais l'étude de la stationnarité, au chapitre 8, deviendrait un calcul pénible au lieu d'être une lecture immédiate. Une bonne notation ne raccourcit pas seulement l'écriture : elle rend le résultat visible.

L'opérateur

Opérateur retard

L'opérateur L (pour *lag*, parfois noté B pour *backshift*) décale la série d'une période :

$$L y_t = y_{t-1}.$$

En l'appliquant plusieurs fois :

$$L^2 y_t = L(Ly_t) = Ly_{t-1} = y_{t-2}, \quad \text{et en général} \quad L^k y_t = y_{t-k}.$$

Quatre propriétés

1. $L^0 = \text{Id} : L^0 y_t = y_t$.
2. $L c = c$ pour toute constante : une constante n'a pas de passé.
3. **Linéarité** : $L(a y_t + b z_t) = a y_{t-1} + b z_{t-1}$.
4. $L^{-1} y_t = y_{t+1}$: l'opérateur d'avance.

Le point qui autorise tout le reste

L se manipule **comme un nombre**. On peut l'additionner, le multiplier, le mettre en facteur, l'élever à une puissance — et, sous condition, le diviser. C'est ce qui va permettre de traiter les modèles comme des fractions rationnelles.

Différence première

$$\Delta = 1 - L, \quad \text{donc} \quad \Delta y_t = y_t - y_{t-1}.$$

La rentabilité est une différence première

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} = (1 - L) \ln P_t = \Delta \ln P_t.$$

Passer du prix à la rentabilité, c'est appliquer l'opérateur Δ au logarithme du prix. Le chapitre 8 montrera que c'est exactement ce qu'il faut faire pour stationnariser une marche aléatoire.

Les polynômes de retard

Polynôme en l'opérateur retard

$$A(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p,$$

$$B(L) = 1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_q L^q.$$

Attention aux signes

La convention place des **moins** devant les α et des **plus** devant les β . Ce n'est pas de la coquetterie : elle permet d'écrire un AR sous la forme $A(L)y_t = \varepsilon_t$, tous les termes de la série passés à gauche.

Appliquer $A(L) = 1 - 0,5L - 0,2L^2$

$$A(L)y_t = y_t - 0,5 y_{t-1} - 0,2 y_{t-2}.$$

Poser $A(L)y_t = \varepsilon_t$ revient donc exactement à écrire

$$y_t = 0,5 y_{t-1} + 0,2 y_{t-2} + \varepsilon_t.$$

De l'opérateur au nombre complexe

On remplace L par une variable complexe z :

$$A(z) = 1 - \alpha_1 z - \dots - \alpha_p z^p.$$

Les valeurs de z qui annulent ce polynôme sont ses **racines**.

Le résultat vers lequel tout converge

Le comportement de la série tout entière — stationnaire ou non, mémoire courte ou longue — se lira sur la position de ces racines par rapport au cercle unité. C'est le chapitre 8, et c'est cette notation qui le rend possible.

Inverser un polynôme de retard

Peut-on écrire $y_t = \frac{1}{1 - \alpha L} \varepsilon_t$? Traitons L comme un nombre et utilisons la série géométrique :

$$\frac{1}{1 - \alpha L} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \alpha^3 L^3 + \dots$$

Condition de convergence

Cette somme n'a de sens que si $|\alpha| < 1$. On dit alors que le polynôme $1 - \alpha L$ est **inversible**.

Ce que l'inversion révèle

En appliquant la série à ε_t :

$$y_t = \varepsilon_t + \alpha \varepsilon_{t-1} + \alpha^2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \sum_{j \geq 0} \alpha^j \varepsilon_{t-j}.$$

La lecture économique

La série d'aujourd'hui est la somme de **tous les chocs passés**, pondérés par un poids qui décroît géométriquement. α mesure la vitesse d'oubli : proche de 0, les chocs s'effacent aussitôt; proche de 1, ils marquent la série longtemps.

Et si $|\alpha| \geq 1$?

Les poids ne décroissent plus : les chocs anciens comptent autant ou davantage que les récents. La somme diverge, la variance est infinie, le processus n'est pas stationnaire. C'est déjà toute la condition du chapitre 8, obtenue par le calcul le plus élémentaire.

Le va-et-vient qui structure le cours

$$\underbrace{A(L) y_t = \varepsilon_t}_{\text{forme AR, finie}} \iff \underbrace{y_t = A(L)^{-1} \varepsilon_t}_{\text{forme MA infinie}}$$

Pourquoi les deux sont utiles

La forme **AR** est compacte : peu de paramètres à estimer. La forme **MA** rend les calculs de variance et d'autocovariance immédiats, puisque les ε y sont non corrélés. On passera constamment de l'une à l'autre.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 4

- $L^k y_t = y_{t-k}$; L se manipule comme un nombre.
- $\Delta = 1 - L$; la rentabilité est la différence première du log-prix.
- $A(L) = 1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p$ (signes négatifs), $B(L) = 1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q$.
- $\frac{1}{1 - \alpha L} = \sum_{j \geq 0} \alpha^j L^j$, **sous la condition** $|\alpha| < 1$.
- Inverser un polynôme, c'est passer d'une écriture finie à une somme pondérée de tous les chocs passés.

Vers le chapitre 5

Munis de cette notation, nous pouvons construire la première famille : les processus qui s'expliquent par leur propre passé.