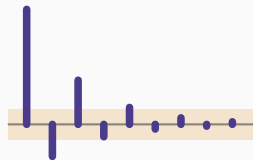


Modélisation ARMA des rentabilités financières

Chapitre 8 : Conditions de stationnarité et d'inversibilité



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Les processus MA : le cas facile

Les processus AR : le cas décisif

Le cas ARMA et la règle générale

Stationnariser en pratique

Synthèse

Avant de commencer

Nous examinons chaque famille séparément, puis nous dégageons la règle unique qui les couvre toutes.

Les processus MA : le cas facile

Résultat

Un MA(q) est stationnaire au sens faible **quelles que soient** les valeurs de $\beta_1, \dots, \beta_q$.

Vérification directe des trois conditions :

$$E(y_t) = \mu, \quad V(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \sum_{j=1}^q \beta_j^2 \right),$$

et la covariance γ_k ne dépend que du nombre de chocs partagés, donc de k seul.

La raison de fond

Une somme **finie** de variables non corrélées de variance finie a une variance finie. Il n'y a aucun mécanisme d'accumulation à contrôler.

Condition d'inversibilité

Les racines de $B(z) = 0$ doivent être de module **strictement supérieur à 1**.

Pour un MA(1) : $1 + \beta z = 0$ donne $z = -1/\beta$, de module $1/|\beta|$. La condition $|z| > 1$ équivaut donc à $|\beta| < 1$.

Les processus AR : le cas décisif

Reprenons l'inversion du chapitre 4 :

$$y_t = \sum_{j \geq 0} \alpha^j \varepsilon_{t-j} \quad \Rightarrow \quad V(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j \geq 0} \alpha^{2j} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2}.$$

Condition

La série géométrique converge si et seulement si $|\alpha| < 1$. C'est la condition de stationnarité de l'AR(1).

Ce qui se passe aux bornes

$|\alpha| < 1$: les chocs anciens sont oubliés, la variance est finie.

$\alpha = 1$: aucun choc n'est oublié, $V(y_t) = t \sigma_\varepsilon^2$ croît sans limite.

$|\alpha| > 1$: les chocs sont amplifiés, la série explose.

Écrivons la condition avec le polynôme : $A(z) = 1 - \alpha z$ s'annule en $z = 1/\alpha$, de module $1/|\alpha|$.

$$|\alpha| < 1 \iff \left| \frac{1}{\alpha} \right| > 1 \iff \text{la racine de } A \text{ est hors du cercle unité.}$$

Le pas important

La condition portait sur un **coefficient**; elle porte désormais sur une **racine**. C'est cette seconde formulation qui se généralisera à tout ordre p , alors que la première ne le peut pas.

Condition de stationnarité d'un AR(p)

Un AR(p) est stationnaire si et seulement si **toutes** les racines de

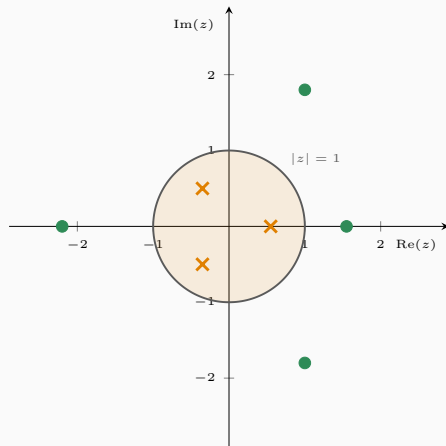
$$A(z) = 1 - \alpha_1 z - \dots - \alpha_p z^p = 0$$

sont de module strictement supérieur à 1.

Une erreur classique

Pour un AR(2), la condition n'est **pas** $|\alpha_1| < 1$ et $|\alpha_2| < 1$. Le modèle $y_t = 0,9y_{t-1} + 0,5y_{t-2} + \varepsilon_t$ a ses deux coefficients inférieurs à 1 en valeur absolue, et pourtant $A(1) = 1 - 0,9 - 0,5 = -0,4 < 0$: il existe une racine dans le cercle unité, le processus n'est pas stationnaire.

Le cercle unité



- racines de module > 1 , hors du cercle : **stationnaire**
- × racines de module < 1 , dans le cercle : **non stationnaire**

Deux conditions nécessaires, faciles à tester

$$A(1) = 1 - \sum_i \alpha_i > 0 \quad \text{et} \quad A(-1) = 1 + \sum_i (-1)^i \alpha_i \dots$$

En particulier, si $\sum_i \alpha_i \geq 1$, le processus n'est **pas** stationnaire.

Le cas $\sum \alpha_i = 1$

Alors $z = 1$ est racine : c'est une **racine unitaire**. Le processus est $I(1)$, il faut le différencier avant de le modéliser. C'est précisément ce que détectent les tests de Dickey-Fuller.

Le cas ARMA et la règle générale

ARMA(p,q)

- **Stationnarité** : toutes les racines de $A(z) = 0$ hors du cercle unité.
- **Inversibilité** : toutes les racines de $B(z) = 0$ hors du cercle unité.

Les deux polynômes jouent des rôles séparés : B n'intervient jamais dans la stationnarité, A jamais dans l'inversibilité.

À retenir sous cette forme

Toutes les racines des polynômes de retard doivent être **hors du cercle unité**.

Appliquée à A , elle donne la stationnarité; appliquée à B , l'inversibilité.

La lecture commune

Dans les deux cas, la condition assure la convergence d'une série géométrique — celle qui exprime y en fonction des ε passés, ou celle qui exprime ε en fonction des y passés. Une racine hors du cercle, c'est un poids qui décroît; une racine dedans, c'est un poids qui enfle.

Ce qu'il faut vérifier, famille par famille

Modèle	Stationnarité	Inversibilité
Bruit blanc	acquise	acquise
MA(q)	acquise	racines de B hors du cercle
AR(p)	racines de A hors du cercle	acquise
ARMA(p,q)	racines de A hors du cercle	racines de B hors du cercle

Stationnariser en pratique

Trois étapes, dans cet ordre

1. **Regarder** la série : tendance visible ? amplitude qui change ?
2. **Tester** la racine unitaire : Dickey-Fuller augmenté, Phillips-Perron, KPSS.
3. **Transformer** si nécessaire : logarithme pour stabiliser la variance, différence première pour éliminer la tendance stochastique.

Ne pas différencier à l'excès

Différencier une série déjà stationnaire introduit une structure MA artificielle et gonfle la variance. Une seule différenciation suffit presque toujours en finance ; deux sont rarissimes.

Le cas des rentabilités, réglé d'avance

Le log-prix est $I(1)$; la rentabilité $r_t = \Delta \ln P_t$ est $I(0)$. Le travail de stationnarisation est donc fait dès que l'on choisit de travailler sur les rentabilités — c'est l'une des raisons pour lesquelles la finance les préfère aux prix.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 8

- MA(q) : toujours stationnaire ; inversible si les racines de B sont hors du cercle unité.
- AR(1) : stationnaire si $|\alpha| < 1$, ce qui équivaut à une racine de module > 1 .
- AR(p) : **toutes** les racines de A hors du cercle unité — la condition ne se lit pas coefficient par coefficient.
- ARMA : les deux conditions, chacune sur son polynôme.
- Règle unique : toutes les racines hors du cercle unité.
- $\sum \alpha_i = 1$ signale une racine unitaire : il faut différencier.

Vers le chapitre 10

Les conditions sont posées. Nous pouvons maintenant calculer ce que ces modèles prédisent : espérance, variance, et surtout la fonction d'autocovariance, dont dépend toute l'identification.