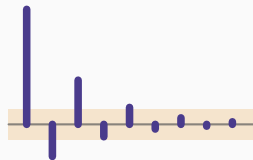


Modélisation ARMA des rentabilités financières

Chapitre 3 : Le bruit blanc



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

La définition

Autocovariance et autocorrélation du bruit blanc

Du bruit blanc aux modèles

Synthèse

Avant de commencer

Le bruit blanc joue deux rôles, et il ne faut pas les confondre.

Deux fonctions, aux deux bouts du cours

Au **début** : c'est la brique. Tous les modèles AR, MA et ARMA se construisent en filtrant un bruit blanc.

À la **fin** : c'est le juge. Un modèle est validé si, et seulement si, ce qu'il n'a pas expliqué — ses résidus — est un bruit blanc.

La définition

Bruit blanc faible

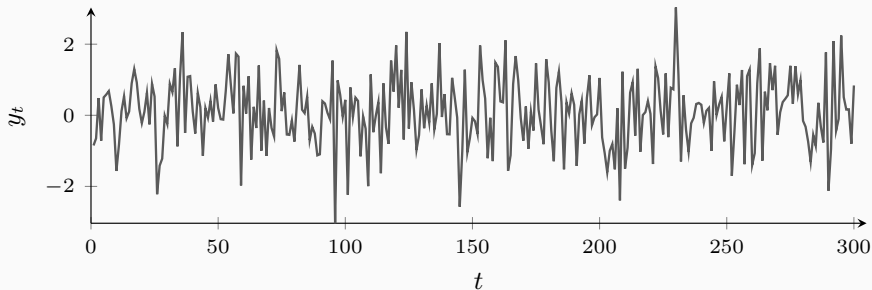
Un processus (ε_t) est un bruit blanc, noté $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, si :

1. $E(\varepsilon_t) = 0$ pour tout t ;
2. $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, constante et finie;
3. $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$ pour tout $k \neq 0$.

Ce que c'est

Un processus stationnaire **sans aucune mémoire**. Chaque tirage ignore complètement les précédents — du moins linéairement.

Bruit blanc : $\varepsilon_t \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$



Aucune structure visible : ni tendance, ni cycle, ni période calme suivie d'une période agitée.

Une hiérarchie qu'il faut connaître

Type	Condition sur les ε_t
faible	non corrélés
fort	indépendants et de même loi (i.i.d.)
gaussien	i.i.d. et de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$

La distinction qui décide de tout le cours

Non corrélé n'est pas indépendant. Deux variables peuvent avoir une corrélation nulle et être fortement liées — par exemple si ε_t et ε_{t-1} ont des **amplitudes** liées sans que leurs signes le soient.

Les rentabilités financières sont approximativement un bruit blanc **faible**. Elles ne sont pas un bruit blanc **fort**. Tout le cours mène à cette phrase.

Autocovariance et autocorrélation du bruit blanc

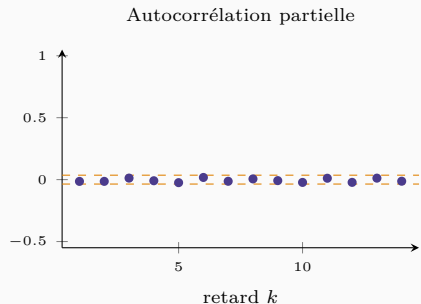
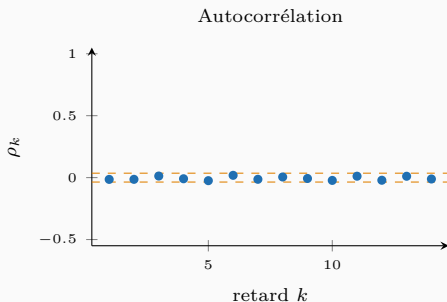
Autocovariance et autocorrélation

$$\gamma_k = \text{Cov}(y_t, y_{t-k}), \quad \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad \rho_0 = 1.$$

Pour un bruit blanc :

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2, \quad \gamma_k = 0 \ (k \neq 0), \quad \rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

L'autocorrélogramme



Autocorrélogramme

Le graphique des $\hat{\rho}_k$ en fonction du retard k , assorti des bandes $\pm 1,96/\sqrt{T}$ à l'intérieur desquelles une autocorrélation est jugée nulle au seuil de 5 %.

D'où viennent les bandes

Sous l'hypothèse de bruit blanc, pour T grand,

$$\hat{\rho}_k \approx \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{T}\right).$$

D'où l'intervalle $\pm 1,96/\sqrt{T}$.

Un piège de lecture, fréquent chez les étudiants

Sur 20 retards testés au seuil de 5 %, on s'attend à en voir **un** sortir des bandes par pur hasard. Un pic isolé au retard 13, sans justification économique, n'est pas un signal : c'est du bruit sur du bruit.

Du bruit blanc aux modèles

Filtre linéaire

Un **filtre linéaire** est une opération qui construit une nouvelle série en combinant les valeurs présentes et passées d'une série d'entrée, avec des poids fixes :

$$y_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \Psi(L) \varepsilon_t,$$

où $\Psi(L) = \sum_{j \geq 0} \psi_j L^j$ est la **fonction de transfert** du filtre. Les ψ_j sont ses **poids**, et le filtre est dit **stable** si $\sum_j |\psi_j| < \infty$.

D'où vient le mot

Le terme est emprunté au traitement du signal : on fait passer un signal d'entrée — ici le bruit blanc — à travers un dispositif qui en atténue certaines composantes et en amplifie d'autres. La sortie porte la trace de ce que le dispositif a fait, non de ce qu'était l'entrée.

Le filtre est la seule source de mémoire

Le principe de toute la modélisation ARMA

Écrire la série observée comme le résultat d'un filtre appliqué à un bruit blanc :

$$y_t = \Psi(L) \varepsilon_t.$$

Où loge la mémoire

L'entrée n'a **aucune** mémoire, par définition du bruit blanc. Toute l'autocorrélation de y vient donc du filtre, et d'elle seule. Deux séries qui diffèrent par leur mémoire diffèrent par leurs ψ_j , jamais par leur bruit.

Deux filtres élémentaires

$\Psi(L) = 1 + \beta L$: seuls deux poids sont non nuls. La sortie ne se souvient que d'une période — c'est un MA(1).

$\Psi(L) = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots$: les poids décroissent géométriquement, la mémoire est infinie mais s'estompe — c'est un AR(1).

Modéliser et démodéliser

Efficiency et imprévisibilité

Si les rentabilités étaient un bruit blanc, aucune stratégie fondée sur les rentabilités passées ne pourrait battre le marché. C'est la forme faible de l'hypothèse d'efficacité. Le cours va tester cette proposition — et la trouver **presque** vraie.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 3

- Bruit blanc : espérance nulle, variance constante, autocovariances nulles à tout retard non nul.
- Faible (non corrélé) $\subset$ fort (i.i.d.) $\subset$ gaussien. **La distinction est décisive.**
- Son autocorrélogramme est plat, à l'intérieur des bandes $\pm 1,96/\sqrt{T}$.
- Sur 20 retards, un dépassement isolé est attendu par hasard.
- Le bruit blanc est la brique des modèles, et le critère de leur validation.

Vers la partie II

Nous avons la brique et le critère. Il reste à construire les filtres — et à se donner d'abord la notation qui les rendra maniables : l'opérateur retard.