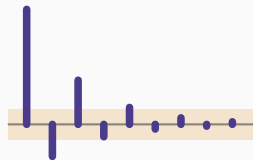


Modélisation ARMA des rentabilités financières

Chapitre 10 : Espérance, variance et fonction d'autocovariance



Avant de commencer

Les moments d'ordre un

Le processus MA : calcul direct

Le processus AR : les équations de Yule-Walker

Le cas ARMA(1,1)

Synthèse

Avant de commencer

Le but n'est pas le calcul

Nous cherchons la **signature** de chaque modèle : la forme que prend sa fonction d'autocovariance. C'est en comparant cette signature théorique aux autocorrélations observées qu'on identifiera p et q sur données réelles.

Les moments d'ordre un

$$E(y_t) = E\left[\mu + \varepsilon_t + \sum_j \beta_j \varepsilon_{t-j}\right] = \mu.$$

La constante d'un MA **est** son espérance : tous les chocs sont centrés.

Espérance d'un AR(p)

En prenant l'espérance de $y_t = \theta + \sum_i \alpha_i y_{t-i} + \varepsilon_t$ et en utilisant la stationnarité ($E(y_t) = E(y_{t-i}) = \mu$) :

$$\mu = \theta + \mu \sum_i \alpha_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{\theta}{1 - \sum_i \alpha_i}}$$

Deux lectures

La constante θ n'est **pas** l'espérance : elle en est un déterminant, amplifié par la persistance. Plus $\sum \alpha_i$ approche 1, plus μ s'éloigne de c – et l'on retrouve au passage la condition de stationnarité, puisque le dénominateur s'annule en $\sum \alpha_i = 1$.

Application numérique

$y_t = 2 + 0,6y_{t-1} + \varepsilon_t$ donne $\mu = 2/(1 - 0,6) = 5$. La série oscille autour de 5, non de 2.

Le processus MA : calcul direct

Avec $y_t = \theta + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$ et $z_t = y_t - \mu$:

$$\gamma_0 = V(z_t) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \beta^2).$$

$$\gamma_1 = E[(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-2})] = \beta\sigma_\varepsilon^2,$$

car seul le produit $\beta\varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-1}$ survit – tous les autres croisent des chocs de dates différentes, non corrélés.

$$\gamma_k = 0 \quad \text{pour } k \geq 2 : \text{ aucun choc partagé.}$$

$$\rho_1 = \frac{\beta}{1 + \beta^2}, \quad \rho_k = 0 \quad (k \geq 2).$$

Une borne à connaître

La fonction $\beta \mapsto \beta/(1 + \beta^2)$ atteint son maximum en $\beta = 1$, où elle vaut 0,5. **Un MA(1) ne peut donc jamais produire une autocorrélation d'ordre 1 supérieure à 0,5 en valeur absolue.** Si les données en montrent une de 0,7, le MA(1) est exclu d'emblée.

Formule générale

$$\gamma_k = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} \beta_j \beta_{j+k} \quad (0 \leq k \leq q), \quad \gamma_k = 0 \quad (k > q),$$

avec la convention $\beta_0 = 1$.

La lecture

γ_k compte les chocs partagés entre y_t et y_{t-k} , pondérés. Au-delà de q retards, il n'y en a plus aucun : la coupure est **nette**, sans décroissance.

Le processus AR : les équations de Yule-Walker

Avec $y_t - \mu = \sum_{j \geq 0} \alpha^j \varepsilon_{t-j}$:

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j \geq 0} \alpha^{2j} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2}.$$

$$\gamma_k = \mathbb{E} \left[\sum_{i \geq 0} \alpha^i \varepsilon_{t-i} \sum_{j \geq 0} \alpha^j \varepsilon_{t-k-j} \right] = \sigma_\varepsilon^2 \alpha^k \sum_{j \geq 0} \alpha^{2j} = \alpha^k \gamma_0.$$

Autocorrélation d'un AR(1)

$$\rho_k = \alpha^k$$

Décroissance géométrique, jamais nulle

$\alpha = 0,8 : \rho_1 = 0,80, \rho_2 = 0,64, \rho_3 = 0,51, \rho_{10} = 0,11$. L'autocorrélation s'estompe mais ne s'annule à aucun retard fini.

Si $\alpha < 0$, elle **alterne** de signe tout en décroissant en module.

La signature qui distingue les deux familles

	AR(1)	MA(1)
ρ_k	décroît géométriquement	s'annule dès $k = 2$
Mémoire	infinie	strictement finie

Multiplions $y_t = \sum_i \alpha_i y_{t-i} + \varepsilon_t$ (centré) par y_{t-k} et prenons l'espérance. Pour $k \geq 1$, $E(\varepsilon_t y_{t-k}) = 0$:

Équations de Yule-Walker

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma_{k-i} \quad (k \geq 1), \quad \text{soit} \quad \rho_k = \sum_{i=1}^p \alpha_i \rho_{k-i}.$$

Ce que ces équations disent

Les autocorrélations obéissent à **la même récurrence** que le processus lui-même. Elles sont donc entièrement déterminées par les α_i — et, lues à l'envers, elles permettent d'estimer les α_i à partir des ρ_k observées. C'est l'estimateur de Yule-Walker.

Pour $k = 0$, le terme en ε ne disparaît pas :

$$\gamma_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma_i + \sigma_\varepsilon^2.$$

AR(2) : le système complet

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}, \quad \rho_2 = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_2}, \quad \rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} \quad (k \geq 3).$$

Selon les racines de A , la décroissance est monotone (racines réelles) ou **oscillante amortie** (racines complexes) — ce qui produit des pseudo-cycles.

Le cas ARMA(1,1)

Autocorrélations d'un ARMA(1,1)

$$\rho_1 = \frac{(1 + \alpha\beta)(\alpha + \beta)}{1 + 2\alpha\beta + \beta^2}, \quad \rho_k = \alpha \rho_{k-1} \quad (k \geq 2).$$

La structure, et c'est tout l'intérêt du modèle mixte

À partir du retard 2, la décroissance est **purement autorégressive**, au rythme α . La partie MA n'agit que sur le **premier** retard, dont elle règle le niveau de départ.

Un ARMA(1,1) permet donc d'ajuster séparément le point de départ et la vitesse de décroissance — ce qu'aucun AR(1) ni MA(1) seul ne peut faire.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 10

- AR : $\mu = \theta / (1 - \sum \alpha_i)$; la constante θ n'est pas l'espérance.
- MA(q) : $\gamma_k = 0$ pour $k > q$ – coupure nette. MA(1) : $\rho_1 = \beta / (1 + \beta^2)$, borné par 0,5.
- AR(1) : $\rho_k = \alpha^k$ – décroissance géométrique, jamais nulle.
- **Yule-Walker** : $\rho_k = \sum_i \alpha_i \rho_{k-i}$; les autocorrélations suivent la même récurrence que le processus.
- ARMA(1,1) : $\rho_k = \alpha \rho_{k-1}$ dès $k \geq 2$; le MA ne règle que le premier retard.

Vers le chapitre 11

Ces fonctions théoriques deviennent un **outil de diagnostic** dès qu'on sait les représenter et les estimer. C'est l'objet du chapitre suivant – et il faudra un second instrument, l'autocorrélation partielle, pour lire l'ordre d'un AR.