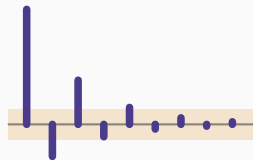


Modélisation ARMA des rentabilités financières

Chapitre 11 : Autocorrélation, autocorrélogramme et mémoire



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Estimer l'autocorrélation

L'autocorrélogramme

L'autocorrélation partielle

Mémoire et stationnarité

Synthèse

Avant de commencer

Le chapitre 10 a donné les ρ_k **théoriques**. Il faut maintenant les estimer sur données, les représenter, et disposer d'un second instrument pour distinguer ce que l'ACF seule ne sépare pas.

Estimer l'autocorrélation

Autocovariance et autocorrélation empiriques

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x}), \quad \hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}.$$

Pourquoi diviser par T et non par $T - k$

Le diviseur T produit un estimateur légèrement biaisé, mais garantit que la matrice des autocovariances reste définie positive — condition indispensable à l'estimation. On préfère un petit biais à une incohérence.

Règles d'usage

On calcule les $\hat{\rho}_k$ jusqu'à $K \approx T/4$, souvent plafonné à 20 ou 40 retards.

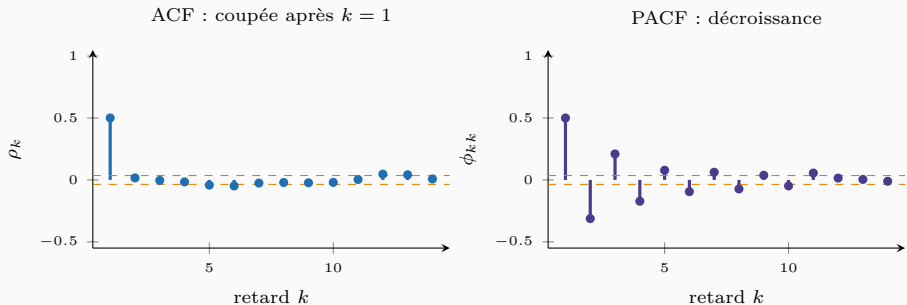
La précision se dégrade avec k

$\hat{\rho}_k$ ne repose que sur $T - k$ paires. Les autocorrélations de rang élevé sont estimées sur peu d'observations : elles sont bruitées, et il ne faut pas les surinterpréter.

L'autocorrélogramme

Autocorrélogramme

Le graphique de $\hat{\rho}_k$ contre k , avec les bandes $\pm 1,96/\sqrt{T}$.



Ici, la coupure après le retard 1 est nette : c'est la signature d'un MA(1).

Ce que la forme révèle

Profil de l'ACF

tout dans les bandes

coupure nette après q

décroissance géométrique

décroissance très lente, quasi linéaire

Diagnostic

bruit blanc : aucune mémoire

MA(q)

AR ou ARMA

non stationnaire : différencier

Le dernier cas est un signal d'alarme

Une ACF qui reste élevée sur trente retards ne dit pas « longue mémoire » : elle dit que la série n'a pas été stationnarisée. Aucun ARMA ne doit être estimé avant d'y avoir remédié.

L'autocorrélation partielle

Le cas de l'AR(1)

Dans un AR(1), $\rho_2 = \alpha^2 \neq 0$. Pourtant y_t ne dépend de y_{t-2} **que par l'intermédiaire** de y_{t-1} : il n'y a aucun lien direct.

L'ACF ne distingue pas le lien direct du lien transmis. Elle ne peut donc pas révéler l'ordre p .

Autocorrélation partielle

ϕ_{kk} est la corrélation entre y_t et y_{t-k} **une fois retiré** l'effet des variables intermédiaires $y_{t-1}, \dots, y_{t-k+1}$.

De façon équivalente : ϕ_{kk} est le coefficient du dernier terme dans la régression

$$y_t = \phi_{k1}y_{t-1} + \phi_{k2}y_{t-2} + \dots + \phi_{kk}y_{t-k} + u_t.$$

La formulation à retenir

« Ce que y_{t-k} apporte **en plus** de ce qu'apportent déjà les retards plus proches. »

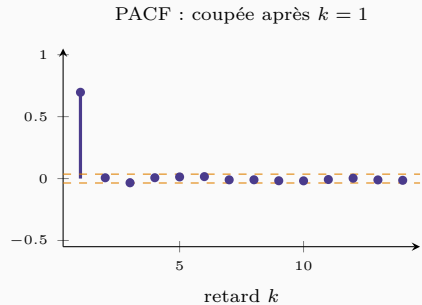
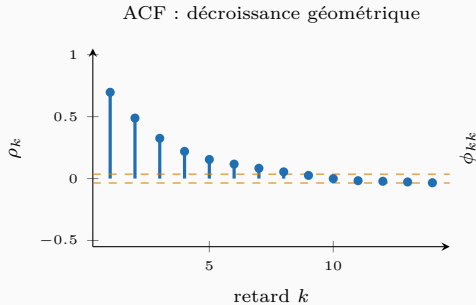
La PACF d'un AR(p)

Pour un AR(p), $\phi_{kk} = 0$ dès que $k > p$.

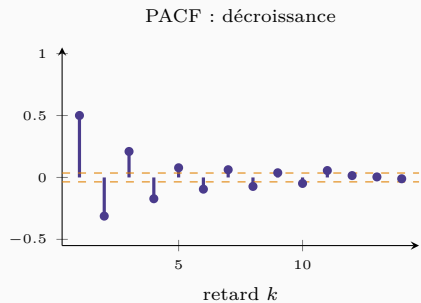
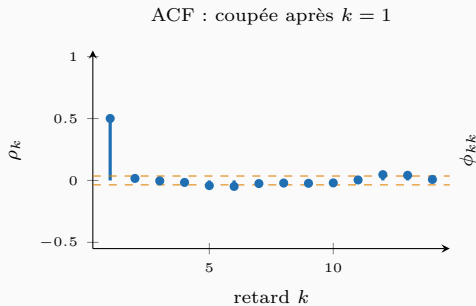
Pourquoi c'est exactement ce qu'il fallait

Au-delà de p retards, le modèle ne contient plus rien : ajouter y_{t-p-1} n'apporte aucune information nouvelle. La PACF **coupe** là où l'ACF ne coupait jamais.

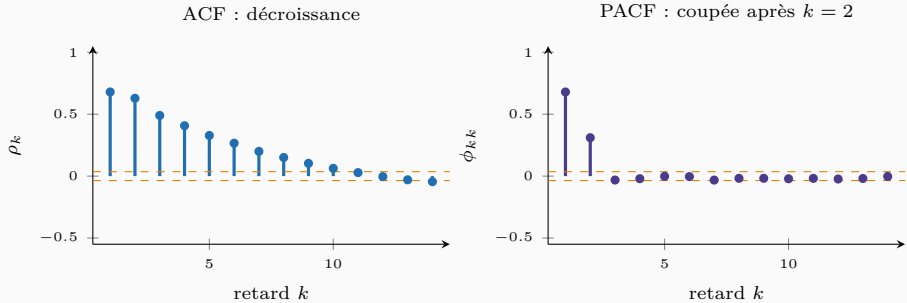
C'est la symétrie parfaite du MA : l'ACF coupe pour un MA, la PACF coupe pour un AR.



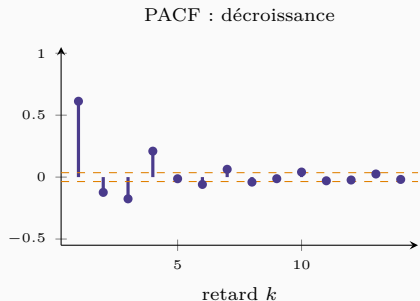
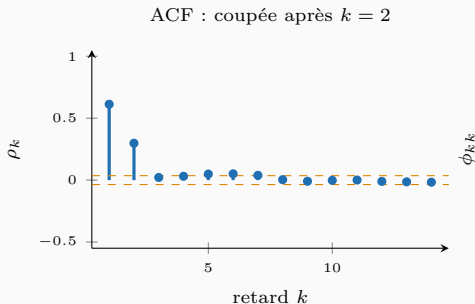
AR(1) : l'ACF décroît géométriquement, la PACF coupe après le retard 1.



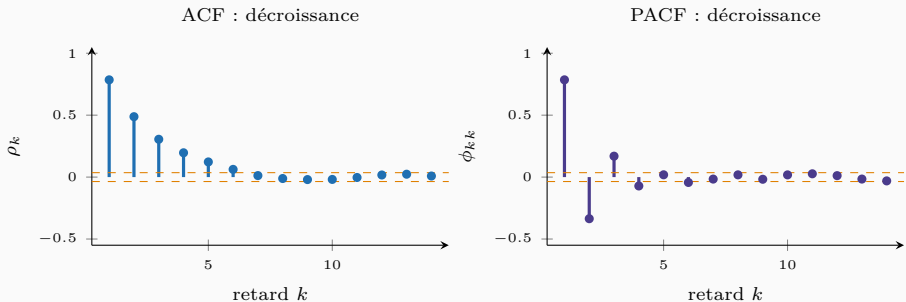
MA(1) : l'ACF coupe après le retard 1, la PACF décroît.



Deux pics significatifs sur la PACF, puis plus rien : $p = 2$ se lit directement.



Deux pics sur l'ACF, puis coupure : $q = 2$. La PACF, elle, s'étire — c'est l'image en miroir exacte du cas précédent.



Le point faible de la méthode

Pour un ARMA(1,1), **ni** l'ACF **ni** la PACF ne coupent : les deux décroissent. On sait qu'il s'agit d'un modèle mixte, mais on ne lit ni p ni q .

C'est cette difficulté qui justifie les deux outils du chapitre 12 — la fonction d'autocorrélation étendue — et les critères d'information du chapitre 13.

Mémoire et stationnarité

Décroissance des autocorrélations et stationnarité

Un processus stationnaire a des autocorrélations qui tendent vers zéro. Un processus à racine unitaire a des autocorrélations qui **ne décroissent pratiquement pas**.

La marche aléatoire, calculée

Pour $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ partant de $y_0 = 0$:

$$\text{Corr}(y_t, y_{t+k}) = \sqrt{\frac{t}{t+k}}.$$

Sur un échantillon de 1000 observations, la corrélation à 10 retards vaut encore **0,995**. Le corrélogramme est presque plat à 1 : impossible de le confondre avec un ARMA stationnaire.

Ce qu'il faut savoir lire — la table d'identification

Modèle	ACF	PACF
Bruit blanc	nulle partout	nulle partout
AR(p)	décroissance géométrique	coupure après p
MA(q)	coupure après q	décroissance géométrique
ARMA(p, q)	décroissance après q	décroissance après p
$I(1)$	décroissance très lente	pic proche de 1 en $k = 1$

C'est la table de tout le reste du cours

Cette table est l'instrument de l'étape d'identification. Le chapitre 12 en montre l'usage sur données réelles — avec ses pièges.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 11

- $\hat{\rho}_k$ s'estime sur $T - k$ paires : les retards élevés sont peu fiables.
- L'autocorrélogramme se lit avec les bandes $\pm 1,96/\sqrt{T}$.
- La **PACF** mesure le lien direct, une fois neutralisés les retards intermédiaires.
- Symétrie fondamentale : l'ACF coupe pour un MA(q), la PACF coupe pour un AR(p).
- Pour un ARMA mixte, aucune des deux ne coupe : il faudra d'autres outils.
- Une ACF qui décroît très lentement signale la non-stationnarité, pas la mémoire longue.

Vers la partie IV

Nous disposons de tout l'appareil théorique. Reste à en faire une **méthode** : c'est la démarche en trois temps de Box et Jenkins.