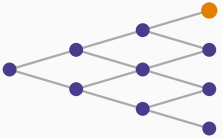
Modèles d’évaluation et de risque

Chapitre 12 : Duration, convexité et DV01



Jaouad Madkour

Faculté d’Économie et de Gestion de Tanger · 29 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

Un facteur unique

Le DV01

La duration effective

La convexité

Duration et portefeuille

Haltère contre balle

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre

Pourquoi ce chapitre ?

Comment un portefeuille obligataire réagit-il à une variation des taux ? Ce chapitre construit les trois mesures de sensibilité — **DV01**, **duration effective**, **convexité effective** — toutes fondées sur une hypothèse forte : les taux sont pilotés par un **facteur unique**. On en tire des règles de couverture, puis la comparaison entre portefeuille concentré et portefeuille en haltère.

Un facteur unique

Ce qu'elle affirme

Le modèle à un facteur

Sous un **modèle à un facteur**, connaître le mouvement d'un seul taux suffit à déduire celui de tous les autres. Le cas le plus simple est le **déplacement parallèle** : tous les taux zéro-coupon bougent du même nombre de points de base, et la forme de la courbe ne change jamais.

Un facteur n'implique pas parallèle

Certains modèles à un facteur font bouger les taux longs **moins** que les taux courts : une hausse de dix points de base sur un an n'en produit que quatre sur dix ans. C'est la conséquence du **retour à la moyenne** du modèle de Vasicek. La courbe se déforme, mais un seul mouvement pilote encore tout.

La portée des mesures de ce chapitre

DV01, duration et convexité **effectives** quantifient l'effet d'un déplacement parallèle. Elles offrent une couverture satisfaisante face à ce type de mouvement, mais deviennent insuffisantes dès que la déformation est non parallèle — objet du chapitre suivant.

Le DV01

Le DV01

$$\text{DV01} = -\frac{\Delta P}{\Delta r}$$

C'est la variation de valeur d'une position pour un déplacement parallèle d'**un point de base** de tous les taux. Pour une position longue en obligations, le DV01 est **positif** : le prix baisse quand les taux montent.

Le calcul en pratique

Une obligation à trois ans de nominal un million, coupon 10 % semestriel, vaut 1 037 922. Une hausse d'un point de base fait perdre 265,67 ; une baisse en fait gagner 265,76. La moyenne des deux, **265,72**, est le DV01. L'écart entre les deux chiffres révèle déjà la **non-linéarité** du prix.

Trois variantes

Le **DV01 fondé sur le rendement** part d'une hausse d'un point de base du seul rendement de l'obligation. Le **DV01 fondé sur les taux zéro-coupon** déplace tous les taux comptant. Une troisième variante déplace les **taux à terme**. Les trois donnent des résultats voisins mais non identiques : il faut préciser laquelle on utilise.

Couvrir avec le DV01

La règle

Pour neutraliser une position de DV01 égal à -463, il faut y adjoindre une position de DV01 égal à $+463$. Si l'obligation de couverture a un DV01 de 265,72 pour un million de nominal, il faut en détenir $1\,000\,000 \times 463/265{,}72 \approx 1{,}74$ million.

Ce que la couverture suppose

Elle suppose que **tous** les taux — ceux auxquels la position est exposée et ceux dont dépend l'instrument de couverture — bougent de concert. C'est l'hypothèse d'un facteur unique, et c'est précisément là que se loge le risque résiduel.

La duration effective

La duration effective

$$D = -\frac{\Delta P / P}{\Delta r} \qquad \text{soit} \qquad \Delta P = -D\,P\,\Delta r$$

Là où le DV01 mesure une variation **absolue**, la duration mesure une variation **relative**. Exprimée en décimales, elle vaut ici $265{,}72 / 1\,037\,922 \times 10\,000 = 2{,}56$ — soit une baisse de 2,56 % du prix pour une hausse de 100 points de base.

Une question d'échelle, pas de nature

Duration par point de base, pour 100 points ou pour 10 000 : ce ne sont que des conventions d'échelle. On calcule toujours l'effet d'une **petite** variation, qu'on multiplie ensuite. On ne déplace jamais réellement les taux de 100 points de base pour le mesurer.

Duration ou DV01 ?

Le **DV01** convient quand l'enjeu est un montant en devise, et il croît avec la taille de la position. La **duration** convient quand l'enjeu est un rendement en pourcentage, et elle ne dépend pas de la taille. Pour un swap, dont la valeur initiale est nulle, la duration n'a aucun sens : seul le DV01 est utilisable.

Les obligations à clause optionnelle

Le piège de l'obligation remboursable

Une obligation **remboursable par anticipation** ne peut être traitée comme une obligation ordinaire : la clause de remboursement **réduit** sa duration. Ignorer la clause, ou supposer sa probabilité d'exercice constante, conduit à une erreur — car une hausse des taux réduit précisément cette probabilité.

La bonne méthode

On valorise l'obligation aujourd'hui, puis on la revalorise après une hausse d'un point de base **en réévaluant la probabilité d'exercice**, et l'on déduit la duration de la variation relative. La même logique s'applique à l'obligation remboursable au gré du porteur, dont la clause joue en sens inverse.

La convexité

La convexité effective

$$C = \frac{1}{P}\,\frac{P^{+} + P^{-} - 2P}{(\Delta r)^2}$$

où P^{+} et P^{-} sont les valeurs après hausse et baisse de Δr. La convexité mesure la **sensibilité de la duration** elle-même aux variations de taux.

L'approximation améliorée

$$\Delta P \approx -D\,P\,\Delta r + \tfrac{1}{2}\,C\,P\,(\Delta r)^2$$

Sur l'exemple précédent, une hausse de 200 points de base fait perdre 51 473. La duration seule prédit 53 142 ; duration et convexité ensemble prédisent 51 429 — nettement plus proche.

Ce que la convexité apporte au détenteur

La duration seule **surestime** toujours l'ampleur des pertes et **sous-estime** celle des gains : la relation prix-taux est convexe. Une convexité positive est donc favorable au détenteur lors de tout déplacement parallèle, dans un sens comme dans l'autre.

Deux obligations, deux équations

Pour annuler simultanément duration et convexité, il faut **deux** instruments :

$$-VD_V + P_1 D_1 + P_2 D_2 = 0, \qquad -VC_V + P_1 C_1 + P_2 C_2 = 0.$$

La solution donne les deux montants à investir, l'un généralement long, l'autre court.

Ce qui reste malgré tout

Une position immunisée en duration **et** en convexité résiste à des déplacements parallèles de grande amplitude. Elle reste néanmoins exposée aux déformations **non parallèles** — la limite structurelle de tout le chapitre.

Duration et portefeuille

Duration de Macaulay et duration modifiée

$$D_{\text{Mac}} = \frac{\sum_i t_i c_i e^{-y t_i}}{P}$$

C'est la moyenne des dates de flux, pondérée par la part de la valeur reçue à chaque date — d'où le mot « duration ». En capitalisation semestrielle, on divise par $1 + y/2$: c'est la **duration modifiée**.

Effective ou fondée sur le rendement ?

Les deux familles donnent des valeurs très proches. Mais comparer les mesures **fondées sur le rendement** de deux obligations pour construire une couverture revient à supposer implicitement que leurs rendements bougent à l'identique — hypothèse rarement vraie pour des maturités éloignées.

Les règles

Le **DV01 d’un portefeuille est la somme** des DV01 de ses composantes. La **duration** et la **convexité** d’un portefeuille sont les **moyennes pondérées par la valeur** de celles de ses composantes. Ces règles font tout l’intérêt pratique de ces mesures.

Haltère contre balle

Deux portefeuilles de même duration

Les deux stratégies

La stratégie **en balle** concentre l'investissement sur une seule maturité intermédiaire. La stratégie **en haltère** combine une maturité courte et une maturité longue de façon à obtenir la **même duration**. Même valeur, même duration — mais convexités différentes.

Le contraste

Une obligation à dix ans de duration 8,18 a une convexité de 78,9. Un mélange de 56 % à cinq ans et 44 % à vingt ans atteint la même duration mais une convexité de **107,4**. L'haltère est nettement plus convexe.

Pourquoi ce n'est pas un arbitrage

Puisqu'une convexité plus élevée est toujours favorable lors d'un déplacement **parallèle**, acheter l'haltère et vendre la balle semble un arbitrage. Il n'en est rien : les déplacements réels sont non parallèles, et la balle l'emporte dans beaucoup de ces configurations.

Le prix de la convexité

Sur une courbe **croissante**, la balle offre un rendement supérieur à l'haltère. Si les taux ne bougent pas, elle gagne l'écart de rendement. La convexité supplémentaire de l'haltère se paie donc par un rendement moindre : le marché ne la donne pas.

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

Synthèse du chapitre

Toutes les mesures de ce chapitre reposent sur l'hypothèse d'un **facteur unique**, et plus précisément d'un déplacement **parallèle** de la courbe. Le **DV01** donne la variation en devise pour un point de base, la **duration effective** la variation en pourcentage, la **convexité effective** la sensibilité de la duration elle-même. La duration seule surestime les pertes et sous-estime les gains ; l'ajout du terme de convexité corrige l'essentiel de l'écart. Les obligations à clause optionnelle exigent de **réévaluer la probabilité d'exercice** à chaque déplacement. Le DV01 d'un portefeuille s'**additionne**, sa duration et sa convexité se **moyennent** en pondérant par les valeurs. Enfin, l'**haltère** est plus convexe que la **balle** à duration égale, ce qui n'est pas un arbitrage : cette convexité se paie par un rendement inférieur et se retourne lors des déformations non parallèles.