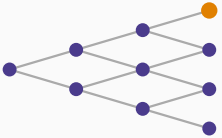
Modèles d'évaluation et de risque

Chapitre 15 : Le modèle de Black-Scholes-Merton



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 29 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

La loi log-normale

La formule

Les extensions

La volatilité implicite

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

L'arbre binomial du chapitre précédent converge vers une formule fermée. Ce chapitre en expose le socle — la **loi log-normale** des prix —, les hypothèses du modèle, la formule elle-même, son extension aux dividendes, devises et contrats à terme, la question de l'**exercice anticipé**, et enfin la **volatilité implicite**, qui inverse la démarche.

La loi log-normale

La distribution des prix

La propriété log-normale

Sous les hypothèses du modèle, le prix futur S_T suit une loi **log-normale** : c'est son logarithme qui est normal,

$$\ln S_T \sim \varphi \left[\ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{\sigma^2}{2} \right) T,\ \sigma^2 T \right].$$

Le prix ne peut donc jamais devenir négatif, et sa distribution est **asymétrique à droite**.

Pourquoi le terme en σ²/2

Le rendement **espéré** est μ, mais le rendement **moyen composé** attendu n'est que $\mu - \sigma^2/2$. L'écart vient de la convexité du logarithme : une hausse de 50 % suivie d'une baisse de 50 % ne ramène pas au point de départ. Plus la volatilité est forte, plus l'écart se creuse.

Les deux moments

$$\mathbb{E}(S_T) = S_0 e^{\mu T}, \qquad \mathrm{Var}(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T} \left(e^{\sigma^2 T} - 1 \right).$$

L'espérance croît au taux μ, mais la **médiane** croît au taux $\mu - \sigma^2/2$, inférieur : la moyenne est tirée vers le haut par la queue droite.

Estimer la volatilité historique

Le calcul

On calcule les rendements logarithmiques $u_i = \ln(S_i / S_{i-1})$ sur n observations, on en prend l'écart-type, et l'on **annualise** en divisant par $\sqrt{\Delta t}$, où Δt est le pas en années.

Le compromis sur la fenêtre

Une fenêtre longue réduit l'erreur d'estimation mais retient des données périmées ; une fenêtre courte suit mieux le régime en cours mais devient instable. En pratique on retient souvent entre 90 et 180 jours de cotation, et l'on ne compte que les **jours de bourse** : la volatilité s'accumule quand le marché est ouvert.

La formule

Les hypothèses

Ce que le modèle suppose

Le prix suit un mouvement brownien géométrique à volatilité **constante** ; la vente à découvert est possible ; il n'y a ni coûts de transaction ni impôts ; les titres sont parfaitement divisibles ; le taux sans risque est **constant** et identique pour toutes les maturités ; la négociation est **continue** ; il n'y a pas d'arbitrage.

Les hypothèses qui posent problème

La volatilité constante est démentie par le regroupement des variances du chapitre 3, et la loi log-normale sous-estime les **queues épaisses**. Ces deux écarts expliquent l'essentiel des déviations observées entre prix de marché et prix théorique.

Les formules européennes

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \qquad p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Comment lire ces termes

$N(d_2)$ est la **probabilité risque-neutre** que l'option soit exercée. $N(d_1)$ est le **delta** de l'option — le nombre d'actions du portefeuille répliquant. La formule s'écrit donc comme un portefeuille : $N(d_1)$ actions financées par un emprunt de $K e^{-rT} N(d_2)$.

Le rendement espéré est absent

Ni μ ni aucune anticipation de prix n'apparaissent. Seuls interviennent S_0, K, T, r et σ — dont quatre sont **observables**. C'est le même mécanisme risque-neutre que dans l'arbre binomial, poussé à la limite continue.

Les extensions

Le rendement continu

Il suffit de remplacer S_0 par $S_0 e^{-qT}$ dans les formules :

- action ou **indice** versant un dividende continu de taux q ;
- **devise**, avec $q = r_f$ le taux étranger ;
- **contrat à terme**, avec $q = r$, ce qui donne la formule de Black.

Les dividendes discrets

Lorsque les dates de détachement sont connues, on retranche du prix comptant la **valeur actuelle** des dividendes attendus avant l'échéance, puis on applique la formule ordinaire au prix ainsi corrigé.

L’exercice anticipé

Le call sur action sans dividende

Il n’est **jamais** optimal d’exercer un call américain sur une action ne versant pas de dividende avant l’échéance : exercer détruit la valeur temps et anticipe le paiement du prix d’exercice. Le call américain vaut donc exactement le call européen.

Les deux exceptions

Un **call** peut être exercé juste avant un détachement de dividende suffisamment important, car le prix va chuter. Un **put** peut l’être dès que l’action est très en dessous du prix d’exercice : encaisser K immédiatement et le placer l’emporte alors sur l’attente.

La conséquence pratique

Black-Scholes-Merton n’évalue que les options **européennes**. Dès qu’un exercice anticipé est plausible, il faut revenir à l’**arbre binomial** du chapitre précédent, seul capable de tester la décision à chaque nœud.

Les bons de souscription

La dilution

Un **bon de souscription** émis par la société elle-même crée des actions nouvelles à l'exercice, ce qui **dilue** les actionnaires existants. Sa valeur est celle d'un call ordinaire multipliée par $N/(N+M)$, où N est le nombre d'actions et M celui des bons.

Un coût déjà supporté

Le marché anticipe la dilution dès l'annonce de l'émission : le coût pour les actionnaires est **immédiat**, pas différé à l'exercice. C'est la raison pour laquelle la comptabilisation des plans d'options à leur juste valeur a fini par s'imposer.

La volatilité implicite

Inverser la formule

Définition

La **volatilité implicite** est la valeur de σ qui, injectée dans la formule, restitue exactement le prix de marché de l'option. Le prix étant strictement croissant en σ, cette valeur est unique et s'obtient par recherche numérique.

Un changement de langage

Les opérateurs ne cotent plus des prix mais des **volatilités**. C'est plus stable et directement comparable entre exercices et échéances. La formule cesse alors d'être un modèle d'évaluation pour devenir une **convention de cotation**.

Le sourire de volatilité

Si le modèle était exact, toutes les options d'un même sous-jacent auraient la même volatilité implicite. Ce n'est pas le cas : elle varie avec le prix d'exercice, dessinant un **sourire** ou un rictus. C'est la trace des queues épaisses et de la volatilité stochastique que le modèle ignore — un exemple typique du **risque de modèle** du chapitre 7.

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

Synthèse du chapitre

Le modèle repose sur la **log-normalité** de S_T : le prix reste positif, sa distribution est asymétrique, et le rendement composé attendu vaut $\mu - \sigma^2/2$, inférieur au rendement espéré μ. La formule $c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$ s'interprète comme un **portefeuille répliquant** — $N(d_1)$ est le delta, $N(d_2)$ la probabilité risque-neutre d'exercice — et ne fait intervenir **aucune anticipation** de rendement. Elle s'étend aux dividendes, indices, devises et contrats à terme en remplaçant S_0 par $S_0 e^{-qT}$. Un **call américain sur action sans dividende** ne s'exerce jamais par anticipation ; dans les autres cas il faut recourir à l'arbre binomial. Les **bons de souscription** valent un call corrigé du facteur de dilution $N/(N+M)$. Enfin, la **volatilité implicite** inverse la formule et en fait une convention de cotation ; le **sourire** qu'elle dessine signale précisément les hypothèses que le modèle viole.