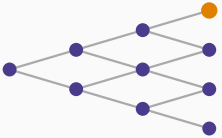
Modèles d'évaluation et de risque

Chapitre 9 : Actualisation et arbitrage



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 29 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

Les facteurs d'actualisation

La loi du prix unique

Les portefeuilles répliquants

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre

Pourquoi ce chapitre ?

Les huit premiers chapitres ont mesuré le **risque**. Les suivants passent à l'**évaluation**. Tout repose sur un principe unique, la **loi du prix unique** : deux ensembles de flux identiques doivent valoir le même prix. On en tire les facteurs d'actualisation, la détection d'arbitrages et la construction de portefeuilles répliquants.

Les facteurs d’actualisation

Le facteur d'actualisation

Le facteur $d(t)$ est la valeur aujourd'hui d'une unité monétaire certaine reçue à la date t. La valeur actuelle d'un ensemble de flux c_t s'écrit alors simplement

$$V = \sum_t c_t \, d(t).$$

La fonction d'actualisation

L'ensemble des $d(t)$ forme la **fonction d'actualisation**. Elle vaut 1 en $t = 0$ et décroît avec la maturité tant que les taux sont positifs. Elle contient exactement la même information qu'une courbe de taux, mais sous une forme directement multiplicative — donc plus commode.

Pourquoi travailler en facteurs plutôt qu'en taux

Les taux dépendent d'une convention de capitalisation ; les facteurs d'actualisation, non. Ils sont directement comparables et s'additionnent linéairement dans une valorisation. C'est le langage naturel de l'évaluation obligataire.

Extraire les facteurs des prix

Le bootstrapping

On part de l'instrument de plus courte maturité pour en extraire $d(t_1)$, puis on utilise le suivant, dont on connaît désormais tous les facteurs sauf le dernier, et ainsi de proche en proche. Chaque nouvel instrument livre un facteur supplémentaire.

Le principe en pratique

Une obligation à un an sans coupon intermédiaire donne immédiatement $d(1)$ par le rapport entre son prix et son flux terminal. Une obligation à deux ans versant un coupon donne ensuite $d(2)$, puisque son prix vaut $c\,d(1) + (c+100)\,d(2)$ et que $d(1)$ est connu.

La loi du prix unique

Énoncé et justification

La loi du prix unique

Deux actifs produisant **exactement les mêmes flux** dans tous les états du monde doivent avoir le **même prix**. Sinon, acheter le moins cher et vendre le plus cher dégage un profit immédiat sans risque ni mise de fonds.

Un principe, pas une hypothèse de comportement

La loi ne suppose ni rationalité des investisseurs ni efficience informationnelle. Elle exige seulement que **quelques** intervenants soient capables d'exploiter un écart. C'est ce qui en fait le fondement le plus robuste de toute la théorie de l'évaluation.

Ses conditions d'application

Elle suppose des **ventes à découvert** possibles, des coûts de transaction négligeables et l'absence de contrainte de financement. Chacune de ces conditions se relâche en pratique : le prix évolue alors dans une **fourchette** autour de la valeur théorique, dont la largeur mesure les frictions — comme pour l'arbitrage indiciel du chapitre 10 du cours précédent.

Détecter un arbitrage

La méthode

On valorise chaque titre avec la **même** fonction d'actualisation. Tout écart entre le prix théorique et le prix de marché signale soit une opportunité d'arbitrage, soit un élément non pris en compte — optionnalité implicite, différence de liquidité, traitement fiscal.

La question à se poser d'abord

Un écart apparent est bien plus souvent le signe d'un **modèle incomplet** que d'un arbitrage réel. Avant de conclure à l'opportunité, il faut vérifier ce que le titre contient qu'on n'a pas modélisé. C'est la version obligataire du principe selon lequel les marchés offrent rarement un déjeuner gratuit.

Les portefeuilles répliquants

Reconstituer des flux

Le principe

On construit une combinaison de titres existants reproduisant **exactement** les flux d'un titre cible. Par la loi du prix unique, la valeur du portefeuille répliquant donne le prix du titre.

La résolution

Chaque date de flux fournit une équation, chaque titre disponible une inconnue — sa quantité. Avec autant de titres que de dates, le système linéaire a une solution unique, que l'on résout de proche en proche en partant de la dernière échéance.

Ce que la réplication permet

Elle donne un prix à un titre **peu liquide** à partir d'instruments liquides. Elle fournit la **couverture** correspondante — détenir le portefeuille répliquant en sens inverse neutralise l'exposition. Et elle permet de vérifier la cohérence d'une grille de prix : si deux combinaisons produisant les mêmes flux ont des prix différents, l'une des cotations est fausse.

La portée du raisonnement

Ce mécanisme — répliquer pour évaluer — est exactement celui qui fonde l'évaluation des dérivés. Le prix à terme du chapitre 10 du cours précédent s'obtient ainsi, et la valorisation des options reposera

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

Synthèse du chapitre

Le **facteur d'actualisation** $d(t)$ — valeur actuelle d'une unité reçue en t — permet d'écrire toute valorisation comme $V = \sum_t c_t d(t)$; il contient la même information qu'une courbe de taux mais sans dépendre d'une convention de capitalisation. Les facteurs s'extraient des prix observés par **bootstrapping**, chaque instrument livrant une inconnue supplémentaire. La **loi du prix unique** — mêmes flux, même prix — ne suppose ni rationalité ni efficience, seulement l'existence de quelques arbitragistes ; ses conditions d'application se relâchent en pratique, d'où une **fourchette** de prix reflétant les frictions. Tout écart au prix théorique signale plus souvent un **modèle incomplet** qu'un arbitrage réel. Enfin, le **portefeuille répliquant** reconstitue exactement les flux d'un titre : il en donne le prix, la couverture, et fonde toute l'évaluation des produits dérivés.