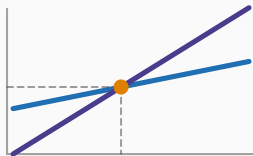


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 4 : Variations et extremums



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Du signe de la dérivée aux variations

Le tableau de variations

Extremums locaux et extremums globaux

Reconnaître la nature d'un point critique

La méthode complète

Ce qu'il faut retenir

Du signe de la dérivée aux variations

Signe de la dérivée et sens de variation

Sur un intervalle I :

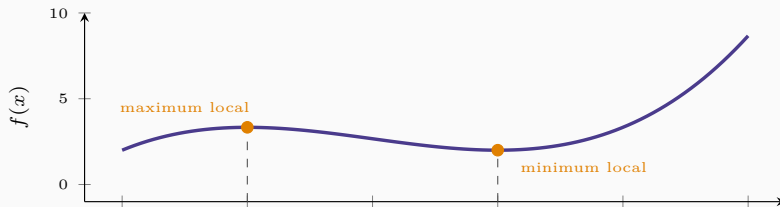
- si $f'(x) > 0$ pour tout x de I , alors f est **croissante** sur I ;
- si $f'(x) < 0$ pour tout x de I , alors f est **décroissante** sur I ;
- si $f'(x) = 0$ pour tout x de I , alors f est **constante** sur I .

Pourquoi c'est la clé de tout

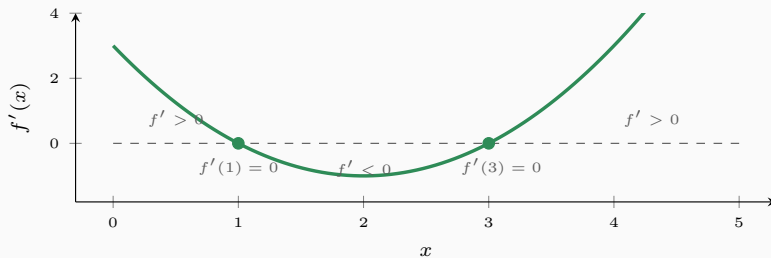
Ce théorème transforme une question difficile — « comment se comporte f ? » — en une question facile : « quel est le signe de f' ? ».

Étudier le signe d'une expression, c'est résoudre une inéquation. C'est infiniment plus simple que d'examiner une fonction point par point.

la fonction f



sa dérivée f'



Lire les deux courbes ensemble

La courbe du bas est la dérivée de celle du haut. Regardez leurs points remarquables se répondre :

- là où la dérivée est **au-dessus** de l'axe, la fonction **monte**;
- là où elle est **en dessous**, la fonction **descend**;
- là où elle **coupe** l'axe, la fonction change de sens.

Les racines de f' sont exactement les abscisses des sommets et des creux de f .

Le tableau de variations

Construire le tableau, en cinq étapes

La méthode

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Résoudre $f'(x) = 0$: ce sont les **points critiques**.
4. Étudier le **signe** de f' entre ces points.
5. Reporter dans un tableau : le signe de f' sur une ligne, le sens de variation de f sur la suivante.

Le tableau n'est pas une décoration

C'est un instrument de synthèse : il rassemble en cinq centimètres carrés tout ce qu'il y a à savoir sur la fonction — où elle monte, où elle descend, quelles valeurs elle atteint aux points remarquables.

Un correcteur y lit votre raisonnement d'un coup d'œil. Un dirigeant aussi.

Étudier une fonction cubique sur l'intervalle 0 à 5

Dérivée : $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

Points critiques : $x^2 - 4x + 3 = 0$. Discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, donc $\sqrt{\Delta} = 2$ et

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \implies x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 3$$

Signe : un trinôme de coefficient dominant positif est **positif à l'extérieur** de ses racines, négatif entre elles.

Valeurs : $f(0) = 2$, $f(1) = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3} \approx 3,33$, $f(3) = 9 - 18 + 9 + 2 = 2$,
 $f(5) = \frac{125}{3} - 50 + 17 \approx 8,67$.

Tableau de variations

x	0		1		3		5
signe de f'		+	0	—	0	+	
variations de f	2	croît	3,33	décroît	2	croît	8,67

La lecture

La fonction monte jusqu'à $x = 1$, redescend jusqu'à $x = 3$, puis remonte.

Elle atteint donc un **maximum local** en $x = 1$ et un **minimum local** en $x = 3$.

Extremums locaux et extremums globaux

Local et global

- f admet un **maximum local** en a si $f(a) \geq f(x)$ pour tout x **proche** de a .
- f admet un **maximum global** en a si $f(a) \geq f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition.

L'image de la montagne

Un maximum local est un sommet : le point le plus haut **de son voisinage**. Un maximum global est le point le plus haut de tout le massif.

Il peut y avoir plusieurs maximums locaux; il n'y a au plus qu'une valeur maximale globale.

Deux mots à distinguer soigneusement (suite)

Sur l'exemple précédent

$x = 1$ donne un maximum **local** ($f(1) = 3,33$), mais pas global : $f(5) = 8,67$ est plus élevé.

Le maximum global sur $[0; 5]$ est atteint **au bord**, en $x = 5$.

Une erreur qui coûte cher

Confondre les deux revient à s'arrêter au premier sommet venu en croyant avoir atteint la meilleure solution. En gestion, cela signifie retenir un plan de production correct mais pas optimal.

Toujours comparer les valeurs aux points critiques et aux bornes de l'intervalle.

Reconnaître la nature d'un point critique

Le critère du changement de signe

Soit a un point critique, c'est-à-dire $f'(a) = 0$.

- Si f' passe de $+$ à $-$: **maximum** local.
- Si f' passe de $-$ à $+$: **minimum** local.
- Si f' ne change pas de signe : **ni l'un ni l'autre** (simple palier).

Attention au troisième cas

$f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$, mais $f'(x) = 3x^2$ reste positif de part et d'autre. La fonction ne fait que ralentir sans s'inverser.

Une dérivée nulle ne suffit donc pas à conclure. C'est une condition nécessaire, pas suffisante.

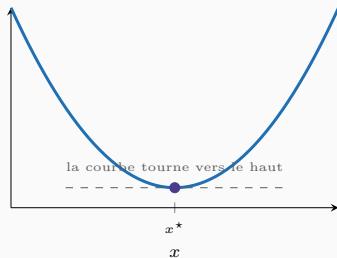
Le critère de la dérivée seconde

Soit a tel que $f'(a) = 0$.

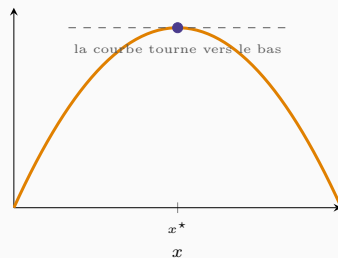
- Si $f''(a) < 0$: la courbe est **concave**, le point est un **maximum**.
- Si $f''(a) > 0$: la courbe est **convexe**, le point est un **minimum**.
- Si $f''(a) = 0$: le critère ne conclut pas; revenir au signe de f' .

Seconde méthode : la dérivée seconde (suite)

$f'' > 0$: convexe, le point est un minimum



$f'' < 0$: concave, le point est un maximum



Un moyen mnémotechnique

$f'' > 0$: la courbe est tournée vers le **haut**, comme un récipient qui retient l'eau. Le fond du récipient est un **minimum**.

$f'' < 0$: la courbe est tournée vers le bas, comme une colline. Le sommet est un **maximum**.

Le signe de f'' et la nature de l'extremum sont **inversés** : c'est le point que les étudiants confondent le plus souvent.

Vérification sur l'exemple

$f'(x) = x^2 - 4x + 3$, donc $f''(x) = 2x - 4$.

- $f''(1) = -2 < 0$: maximum en $x = 1$, conforme au tableau.
- $f''(3) = +2 > 0$: minimum en $x = 3$, conforme au tableau.

Les deux méthodes concordent, comme toujours.

En pratique

Situation

Méthode conseillée

f' est un trinôme, un produit, une expression facile à signer

signe de f'

f' est compliquée mais f'' se calcule bien

dérivée seconde

$f''(a) = 0$

retour obligatoire au signe de f'

Un avantage décisif de la dérivée seconde

Elle donne la réponse **par un simple calcul de nombre**, sans étude de signe.

Et surtout : c'est la seule des deux méthodes qui se généralise aux fonctions de plusieurs variables — c'est elle que l'on retrouvera au chapitre 7.

La méthode complète

Les cinq étapes, à appliquer telles quelles

1. Écrire la fonction et **son ensemble de définition** (dicté par la situation).
2. Calculer f' .
3. Résoudre $f'(x) = 0$: les points critiques.
4. Déterminer leur **nature** (signe de f' ou signe de f'').
5. **Comparer** les valeurs aux points critiques **et aux bornes**; conclure.

L'étape que tout le monde oublie

La cinquième. Un point critique n'est pas nécessairement l'optimum : sur un intervalle fermé, l'optimum peut être atteint à une borne.

En gestion, les bornes sont partout : capacité maximale de l'atelier, budget disponible, quantité minimale contractuelle.

Un cas où l'optimum est à la borne

Une capacité de production limitée

$\Pi(q) = -0,3q^2 + 42q - 300$ sur $[0; 50]$, car l'atelier ne peut pas dépasser 50 unités.

$\Pi'(q) = -0,6q + 42 = 0$ donne $q = 70$ – **hors de l'intervalle**.

Sur $[0; 50]$, Π' reste positive ($\Pi'(50) = 12 > 0$) : le profit est croissant sur tout l'intervalle.

La conclusion de gestion

L'optimum est $q = 50$: il faut **saturer la capacité**. Et le fait que $\Pi'(50) = 12 > 0$ chiffre l'intérêt d'un investissement : chaque unité de capacité supplémentaire rapporterait encore 12 dirhams.

C'est un argument d'investissement obtenu par une dérivée.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Le **signe de f'** donne le sens de variation : c'est le théorème central du cours.
2. Le **tableau de variations** synthétise l'étude en cinq étapes.
3. $f'(a) = 0$ est **nécessaire** mais pas suffisant pour un extremum.
4. La nature du point se lit sur le changement de signe de f' ou sur le signe de f'' — attention à l'inversion : $f'' < 0$ donne un **maximum**.
5. Toujours comparer les points critiques **et les bornes**.

La suite

L'outil est complet. Le chapitre 5 ne fera que l'appliquer, entièrement, à des problèmes de gestion réels.