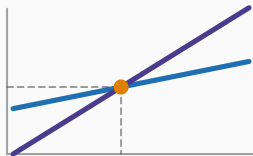


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 9 : Les systèmes d'équations linéaires



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Pourquoi cette partie

Mettre un problème en équations

Les trois cas possibles

Les méthodes élémentaires

Ce qu'il faut retenir

Pourquoi cette partie

Le besoin est déjà apparu

Au chapitre 7, trouver un point critique exigeait de résoudre

$$\begin{cases} 2x + y = 40 \\ x + 2y = 60 \end{cases}$$

Au chapitre 8, la méthode de Lagrange conduisait au même type de système.

Avec deux inconnues, la substitution suffit. Avec quatre ou cinq, elle devient impraticable. Cette partie construit la méthode générale.

L'objectif de la partie III

Savoir résoudre, de manière systématique et sûre, un système de n équations à n inconnues — et savoir reconnaître les cas où il n'a pas de solution unique.

Équation linéaire

Une équation est **linéaire** si les inconnues n'y apparaissent qu'à la puissance 1, sans être multipliées entre elles, ni placées sous une racine, un logarithme ou un exposant.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Linéaire ou non

Équation	Linéaire?
$3x + 5y = 20$	oui
$x^2 + y = 4$	non, à cause de x^2
$xy = 12$	non, produit d'inconnues
$2x + 3y - z = 0$	oui
$\sqrt{x} + y = 7$	non

Mettre un problème en équations

L'énoncé

Un atelier fabrique trois articles A, B et C. Chacun passe par trois postes, dont les capacités hebdomadaires sont saturées.

Poste	A	B	C	Heures disponibles
Découpe	2	1	1	110
Assemblage	1	3	2	190
Finition	1	1	3	170

Combien produire de chaque article pour utiliser exactement toute la capacité ?

Le système

En notant x , y et z les quantités des trois articles :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 110 \\ x + 3y + 2z = 190 \\ x + y + 3z = 170 \end{cases}$$

Trois réflexes

1. **Une inconnue par décision**, jamais par donnée. Ici, les quantités produites.
2. **Une équation par contrainte**, jamais par ligne du tableau lue au hasard. Ici, une par poste.
3. Vérifier l'**homogénéité** : chaque terme d'une équation doit s'exprimer dans la même unité — ici des heures.

Le contrôle d'unités

Ligne 1 : 2 heures par unité de A, multiplié par x unités, donne des heures. Idem pour y et z . Le membre de droite, 110, est en heures.

Ce contrôle élémentaire détecte l'essentiel des erreurs de mise en équation, avant même de commencer à calculer.

Le même outil, quatre usages

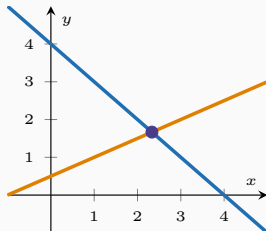
Situation	Inconnues	Équations
Plan de production	quantités par article	capacités des postes
Mélange, incorporation	proportions des composants	teneurs à respecter
Répartition d'un budget	montants par poste	total, ratios imposés
Répartition de charges indirectes	charges par section	prestations réciproques

Ce dernier cas — les prestations croisées entre sections en comptabilité analytique — est **le** problème pour lequel un comptable de gestion a besoin de savoir résoudre un système.

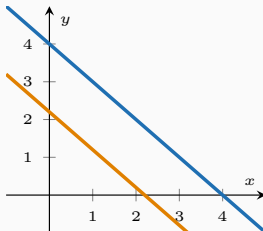
Les trois cas possibles

Ce qu'un système peut donner

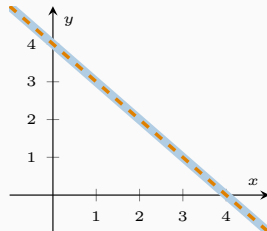
une seule solution
les droites se croisent



aucune solution
les droites sont parallèles



une infinité de solutions
les droites sont confondues



Trois issues, et trois seulement

Un système linéaire admet :

- **une solution unique** — les droites se coupent en un point;
- **aucune solution** — les droites sont parallèles distinctes; le système est dit **incompatible**;
- **une infinité de solutions** — les droites sont confondues; le système est **indéterminé**.

Il n'y a pas de quatrième cas

Deux droites ne peuvent pas se couper en exactement deux points. Cette propriété, évidente sur un dessin, reste vraie avec dix inconnues, où l'on ne peut plus rien dessiner.

C'est une des raisons pour lesquelles on préfère les modèles linéaires : leur comportement est entièrement prévisible.

Une solution unique

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

En additionnant : $2x = 6$, donc $x = 3$ et $y = 1$. Solution unique $(3; 1)$.

Aucune solution

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

La seconde équation dit $x + y = 5$. Or la première dit $x + y = 4$. **Contradiction** : aucun couple ne peut vérifier les deux.

Une infinité de solutions

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

La seconde équation est le double de la première : elle n'apporte **aucune information nouvelle**. Tous les couples $(x; 4 - x)$ conviennent.

L'interprétation professionnelle

Cas	Signification
Solution unique	le plan est déterminé : une seule façon de saturer les capacités
Aucune solution	les contraintes sont incompatibles entre elles; il faut en relâcher une
Infinité de solutions	une contrainte est redondante ; il reste une marge de manœuvre

Aucun de ces cas n'est un échec

Un système sans solution n'est pas une erreur de calcul : c'est une information. Il vous dit que le cahier des charges est contradictoire, et il faut retourner voir le donneur d'ordre.

Un système indéterminé signale une liberté résiduelle : parmi toutes les solutions, on pourra choisir la moins coûteuse. C'est le point de départ de la programmation linéaire.

Les méthodes élémentaires

Substitution et combinaison

Deux techniques scolaires

- **Substitution** : tirer une inconnue d'une équation, la reporter dans les autres.
- **Combinaison linéaire** : additionner ou soustraire des multiples d'équations pour éliminer une inconnue.

Le système du chapitre 7, par combinaison

$$\begin{cases} 2x + y = 40 & (L_1) \\ x + 2y = 60 & (L_2) \end{cases}$$

Calculons $L_1 - 2L_2$:

$$(2x - 2x) + (y - 4y) = 40 - 120 \implies -3y = -80 \implies y = \frac{80}{3}$$

Puis $2x = 40 - \frac{80}{3} = \frac{40}{3}$, donc $x = \frac{20}{3}$. On retrouve bien l'optimum du chapitre 7.

Pourquoi il faut aller plus loin

Le problème d'échelle

Sur le système à trois inconnues de l'atelier, la substitution reste possible — mais elle produit des expressions de plus en plus lourdes, et chaque report est une occasion d'erreur.

Avec cinq inconnues, personne n'aboutit de manière fiable. Et surtout : **on ne sait jamais par où commencer.**

Ce qu'il nous faut

Une méthode qui soit :

1. **systématique** — la même suite d'opérations, quel que soit le système ;
2. **sûre** — chaque étape se vérifie ;
3. **conclusive** — elle détecte d'elle-même les cas sans solution ou à solutions multiples.

Cette méthode existe : c'est le **pivot de Gauss**, chapitre 11. Elle a besoin d'une écriture adaptée, que le chapitre 10 met en place.

Ce qu'il faut retenir

Quatre points

1. Une équation est **linéaire** si les inconnues y sont à la puissance 1 et non multipliées entre elles.
2. La mise en équation obéit à trois règles : une inconnue par décision, une équation par contrainte, contrôle des unités.
3. Un système linéaire a **une solution, aucune, ou une infinité** — jamais autre chose.
4. Chacun de ces trois cas a une **signification de gestion** : plan déterminé, contraintes contradictoires, contrainte redondante.

La suite

Écrire trois fois « x », « y », « z » et le signe « $=$ » à chaque ligne est une perte de temps : seuls les **nombres** comptent.

Le chapitre 10 introduit l'objet qui ne garde que les nombres : la matrice.