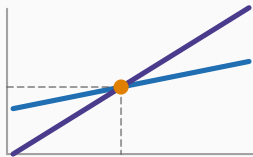


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 11 : Le pivot de Gauss



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

La méthode

La descente

La remontée

Reconnaître les cas particuliers

Le coût de la méthode

Ce qu'il faut retenir

La méthode

Rendre le système trivial avant de le résoudre

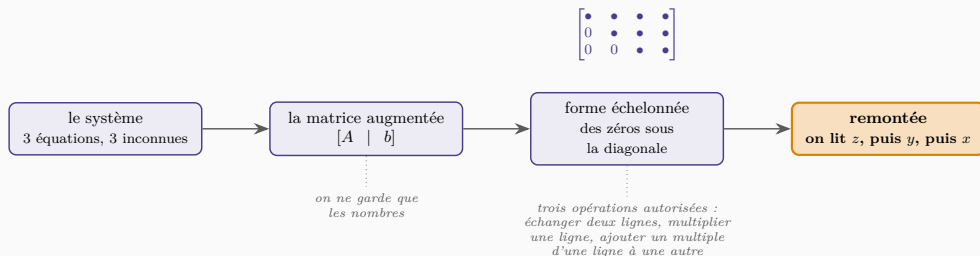
Un système comme

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 190 \\ -5y - 3z = -270 \\ 11z = 440 \end{cases}$$

se résout sans réfléchir : la dernière ligne donne z , la deuxième donne y , la première donne x .

Le pivot de Gauss consiste à **ramener tout système à cette forme**, par des transformations qui ne changent pas les solutions.

Le principe en une phrase (suite)



Les opérations élémentaires sur les lignes

1. **Échanger** deux lignes.
2. **Multiplier** une ligne par un nombre non nul.
3. **Ajouter** à une ligne un multiple d'une autre ligne.

Pourquoi elles ne changent rien

Chacune est **réversible** : on peut toujours revenir en arrière par une opération du même type.

Une solution du système de départ est donc solution du système transformé, et réciproquement. On modifie l'écriture, jamais l'ensemble des solutions.

L'opération interdite

Multiplier une ligne par **zéro**. Ce n'est pas réversible : on détruit une équation, donc de l'information, et l'on se retrouve avec des solutions qui n'en étaient pas.

La descente

L'objectif : des zéros sous la diagonale

Forme échelonnée

On veut obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{array} \right)$$

Le premier terme non nul de chaque ligne s'appelle le **pivot**.

La marche à suivre

1. Choisir un pivot en première colonne (si possible un 1, quitte à échanger deux lignes).
2. L'utiliser pour **annuler** tous les termes situés en dessous.
3. Recommencer avec la deuxième colonne, en n'utilisant plus que les lignes restantes.
4. Continuer jusqu'à la dernière colonne.

Étape 0 — écrire la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 110 \\ 1 & 3 & 2 & 190 \\ 1 & 1 & 3 & 170 \end{array} \right)$$

Le premier coefficient est un 2. On échange L_1 et L_2 pour obtenir un pivot égal à 1 — les calculs seront tous entiers.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 190 \\ 2 & 1 & 1 & 110 \\ 1 & 1 & 3 & 170 \end{array} \right)$$

Étape 1 — annuler sous le premier pivot

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 :$$

$$(2 - 2, 1 - 6, 1 - 4 \mid 110 - 380) = (0, -5, -3 \mid -270)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 :$$

$$(1 - 1, 1 - 3, 3 - 2 \mid 170 - 190) = (0, -2, 1 \mid -20)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 190 \\ 0 & -5 & -3 & -270 \\ 0 & -2 & 1 & -20 \end{array} \right)$$

Étape 2 — annuler sous le deuxième pivot

Le pivot est -5 . Pour éviter les fractions, on emploie la combinaison entière

$$L_3 \leftarrow 5L_3 - 2L_2$$

$$(0, -10 + 10, 5 + 6 \mid -100 + 540) = (0, 0, 11 \mid 440)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 190 \\ 0 & -5 & -3 & -270 \\ 0 & 0 & 11 & 440 \end{array} \right)$$

La forme échelonnée est atteinte.

Une astuce à connaître

Multiplier la ligne à modifier avant de soustraire — ici $5L_3 - 2L_2$ — permet de rester dans les entiers.

C'est autorisé par la deuxième opération élémentaire, et cela supprime la principale source d'erreurs de calcul.

La remontée

Étape 3 – la substitution ascendante

Troisième ligne : $11z = 440 \implies z = 40$.

Deuxième ligne : $-5y - 3(40) = -270 \implies -5y = -150 \implies y = 30$.

Première ligne : $x + 3(30) + 2(40) = 190 \implies x + 170 = 190 \implies x = 20$.

$$x = 20, \quad y = 30, \quad z = 40$$

La réponse au problème de gestion

L'atelier doit produire **20** articles A, **30** articles B et **40** articles C pour saturer exactement ses trois postes.

Reporter dans le système de départ

$$2(20) + 30 + 40 = 40 + 70 = 110 \quad \checkmark$$

$$20 + 3(30) + 2(40) = 20 + 90 + 80 = 190 \quad \checkmark$$

$$20 + 30 + 3(40) = 50 + 120 = 170 \quad \checkmark$$

Une vérification coûte trente secondes

Elle est **toujours** possible et **toujours** concluante : ou bien les trois égalités tombent juste, ou bien il y a une erreur quelque part.

Aucun autre exercice de ce cours ne se contrôle aussi facilement. Il n'y a donc aucune raison de s'en priver.

Reconnaître les cas particuliers

Ce que la forme échelonnée révèle

Lire le résultat de la descente

Dernière ligne obtenue	Conclusion
$\alpha z = \beta$ avec $\alpha \neq 0$	solution unique
$0 = \beta$ avec $\beta \neq 0$	aucune solution
$0 = 0$	infinité de solutions

La méthode se conclut elle-même

C'est l'avantage décisif du pivot sur la substitution : il ne faut rien deviner à l'avance.

On applique la descente, et la forme finale annonce d'elle-même dans lequel des trois cas du chapitre 9 on se trouve.

Une contrainte de trop

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 2 & 2 & 2 & 250 \\ 1 & 2 & 3 & 180 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \\ 1 & 2 & 3 & 180 \end{array} \right)$$

La deuxième ligne se lit $0 = 50$: impossible.

L'interprétation

Les deux premières contraintes portent sur la même combinaison de ressources, mais annoncent deux totaux différents.

Le cahier des charges est contradictoire. Le calcul ne le corrige pas : il le **révèle**, et c'est déjà un résultat exploitable.

Une contrainte redondante

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 2 & 2 & 2 & 200 \\ 1 & 2 & 3 & 180 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2-2L_1, L_3-L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 80 \end{array} \right)$$

Il ne reste que **deux** équations utiles pour trois inconnues.

En posant $z = t$: la troisième ligne donne $y = 80 - 2t$, puis la première $x = 100 - y - z = 20 + t$.

$$(x, y, z) = (20 + t, 80 - 2t, t)$$

La marge de manœuvre

Il existe une infinité de plans admissibles. En gestion, t ne peut pas être quelconque : il faut $y \geq 0$, donc $t \leq 40$, et $t \geq 0$.

Sur l'intervalle $[0; 40]$, on choisira le t qui minimise le coût ou maximise la marge — et l'on rejoint alors la programmation linéaire.

Le coût de la méthode

Pourquoi c'est la méthode des logiciels

Un ordre de grandeur

Le pivot de Gauss demande environ $\frac{n^3}{3}$ opérations pour n inconnues.

Pour $n = 3$: une dizaine d'opérations. Pour $n = 100$: environ 330 000 — l'affaire d'un instant pour un ordinateur.

La comparaison qui compte

La méthode de Cramer, que le chapitre 12 présentera, exige un nombre d'opérations qui croît comme $n!$ — une croissance sans commune mesure.

Pour $n = 20$, Gauss reste immédiat quand Cramer devient hors de portée de toute machine. **Tous les tableurs et tous les logiciels utilisent le pivot de Gauss.**

Le choix du pivot

Quand un pivot est très petit, la division par ce pivot amplifie les erreurs d'arrondi.

Les logiciels choisissent donc systématiquement, dans la colonne traitée, le coefficient de **plus grande valeur absolue**, quitte à échanger deux lignes. C'est ce qu'on appelle le **pivot partiel**.

À la main, on préfère au contraire un pivot égal à **1** : le critère est la simplicité du calcul, pas la stabilité numérique.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Trois opérations élémentaires sur les lignes, toutes réversibles, ne changent pas les solutions.
2. **Descente** : obtenir des zéros sous la diagonale. **Remontée** : lire les inconnues de bas en haut.
3. Multiplier avant de soustraire permet de rester dans les **entiers**.
4. La forme échelonnée **annonce elle-même** le cas : solution unique, aucune, ou une infinité.
5. C'est la méthode réellement employée par les logiciels, parce qu'elle est la moins coûteuse.

La suite

Gauss résout un système, une fois. Mais si le second membre change chaque semaine — la demande, les capacités — on aimerait un objet calculé **une seule fois** et réutilisable.

C'est la matrice inverse, chapitre 12.