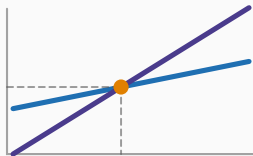


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 8 : Optimiser sous contrainte



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Le problème

La méthode de Lagrange

L'interprétation de λ

Un problème de gestion complet

Les limites de la méthode

Ce qu'il faut retenir

Le problème

Trois situations, une même structure

- Maximiser la production avec un **budget** de 24 000 dirhams à répartir entre travail et capital.
- Maximiser la satisfaction d'un client avec un **revenu** donné.
- Minimiser le coût de production en devant livrer une **quantité** contractuelle.

Dans chaque cas : une fonction à optimiser, et une équation que la solution doit obligatoirement vérifier.

Le problème sous contrainte

optimiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = c$

f est la fonction **objectif**, $g(x, y) = c$ est la **contrainte**.

Une première méthode, souvent suffisante

La substitution

Si la contrainte permet d'exprimer y en fonction de x , on remplace y dans f : le problème devient une optimisation à **une seule variable**, traitée comme au chapitre 4.

Un exemple

Maximiser $f(x, y) = xy$ sous $2x + 3y = 24$.

De la contrainte : $y = \frac{24 - 2x}{3}$. Donc

$$f(x) = x \cdot \frac{24 - 2x}{3} = \frac{24x - 2x^2}{3}$$

$$f'(x) = \frac{24 - 4x}{3} = 0 \implies x = 6, \quad \text{puis } y = \frac{24 - 12}{3} = 4$$

$f'' = -\frac{4}{3} < 0$: c'est bien un maximum. Valeur : $f(6, 4) = 24$.

Pourquoi ne pas s'en contenter

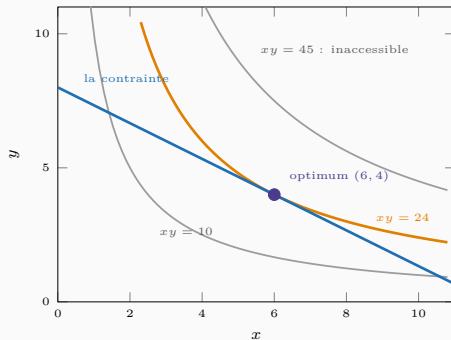
La substitution est excellente ici, et vous devez toujours l'essayer en premier.

Mais elle échoue dès que la contrainte ne se résout pas simplement — $x^2 + y^2 = 100$, ou une Cobb-Douglas à exposants quelconques — et elle ne se généralise pas à plusieurs contraintes.

Il faut donc une méthode qui n'exige jamais d'isoler une variable.

La méthode de Lagrange

maximiser $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $2x + 3y = 24$



l'optimum contraint est le point où la droite du budget *touche* la plus haute courbe de niveau encore accessible : elles y sont tangentes.

C'est exactement ce que traduit la méthode de Lagrange.

Le raisonnement, pas à pas

On se déplace le long de la contrainte, en cherchant à atteindre la courbe de niveau la plus élevée.

Tant que la droite **traverse** une courbe de niveau, on peut faire mieux : il suffit de glisser dans le bon sens.

On ne peut plus progresser au moment précis où la droite ne traverse plus : elle **effleure**. C'est le point de tangence.

La condition de tangence

À l'optimum contraint, la courbe de niveau de f et la contrainte sont **tangentes** : elles ont la même pente.

C'est exactement ce que la méthode de Lagrange traduit en équations.

Le lagrangien

On introduit une variable auxiliaire λ et l'on forme

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda (c - g(x, y))$$

Les conditions du premier ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f'_y - \lambda g'_y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = c - g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ce que fait cette construction

Elle transforme un problème **contraint** à deux variables en un problème **libre** à trois variables — que l'on sait résoudre par la méthode du chapitre 7.

Et remarquez la troisième équation : dériver par rapport à λ **redonne la contrainte**. Elle ne peut donc pas être oubliée : le mécanisme la réintroduit de lui-même.

Le même exemple, par Lagrange

Maximiser $f(x, y) = xy$ sous $2x + 3y = 24$.

$$\mathcal{L} = xy + \lambda(24 - 2x - 3y)$$

$$\begin{cases} y - 2\lambda = 0 & \implies y = 2\lambda \\ x - 3\lambda = 0 & \implies x = 3\lambda \\ 2x + 3y = 24 \end{cases}$$

En reportant : $2(3\lambda) + 3(2\lambda) = 24$, soit $12\lambda = 24$ et $\lambda = 2$.

D'où $x = 6$, $y = 4$, et $f(6, 4) = 24$ — le résultat de la substitution, retrouvé.

La technique de résolution qui marche presque toujours

Tirer λ des deux premières équations et les **égaler** :

$$\frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} \quad \text{ici} \quad \frac{y}{2} = \frac{x}{3}$$

On obtient une relation entre x et y , que l'on combine avec la contrainte. **Deux équations, deux inconnues**, et λ a disparu.

L'interprétation de lambda

Le sens économique de lambda

λ mesure de combien l'optimum augmenterait si la contrainte était relâchée d'une unité :

$$\lambda \approx \frac{\text{variation de } f^*}{\text{variation de } c}$$

Vérification

Avec $\lambda = 2$: porter le budget de 24 à 25 devrait faire passer l'optimum de 24 à environ 26.

Refaisons le calcul avec $c = 25$: $\frac{y}{2} = \frac{x}{3}$ donne toujours $3y = 2x$, et la contrainte $2x + 3y = 25$ devient $4x = 25$, soit $x = 6,25$ et $y = 25/6 \approx 4,17$.

$f = 6,25 \times 4,17 \approx 26,04$. L'écart annoncé était de 2; l'écart réel est de 2,04.

Pourquoi ce nombre vaut de l'argent

λ est le **prix implicite** de la ressource contrainte, ce que les gestionnaires appellent le *prix fictif* ou *shadow price*.

Si un dirham de budget supplémentaire rapporte $\lambda = 2$ unités de production valant 3 dirhams pièce, il faut emprunter tant que le taux d'intérêt reste inférieur à 6 dirhams par dirham emprunté.

λ répond donc à la question : **jusqu'à quel prix suis-je prêt à desserrer ma contrainte ?** C'est souvent l'information la plus utile de tout le calcul.

Un problème de gestion complet

L'énoncé

Production $Q(L, K) = 10 L^{0,5} K^{0,5}$. Salaire $w = 20$ par unité de travail, coût du capital $r = 40$ par unité. Budget : $B = 2000$.

Contrainte : $20L + 40K = 2000$, soit $L + 2K = 100$.

Le lagrangien et les conditions

$$\mathcal{L} = 10L^{0,5} K^{0,5} + \lambda(2000 - 20L - 40K)$$

$$\begin{cases} 5L^{-0,5} K^{0,5} - 20\lambda = 0 \\ 5L^{0,5} K^{-0,5} - 40\lambda = 0 \\ 20L + 40K = 2000 \end{cases}$$

En divisant la première équation par la seconde

$$\frac{5L^{-0,5}K^{0,5}}{5L^{0,5}K^{-0,5}} = \frac{20\lambda}{40\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{L} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L = 2K$$

En reportant dans la contrainte : $20(2K) + 40K = 2000$, donc $80K = 2000$ et

$$K = 25, \quad L = 50$$

Production obtenue : $Q = 10\sqrt{50}\sqrt{25} = 10 \times 7,071 \times 5 \approx 353,6$ unités.

La règle d'or de l'allocation des ressources

La division des deux premières équations donne, dans le cas général,

$$\frac{Q'_L}{w} = \frac{Q'_K}{r}$$

Le dernier dirham dépensé doit rapporter autant, quel que soit le facteur sur lequel on le dépense.

S'il rapportait davantage en capital qu'en travail, il faudrait déplacer un dirham — donc on n'était pas à l'optimum. C'est le principe d'égalisation des productivités marginales pondérées par les prix, et il gouverne toute allocation de budget entre postes.

Le calcul de lambda

De la première équation : $\lambda = \frac{5L^{-0,5}K^{0,5}}{20} = \frac{5 \times 5/7,071}{20} \approx 0,177.$

La décision

Un dirham de budget supplémentaire apporterait environ **0,177** unité de production.

Si le prix de vente unitaire est de **12** dirhams, ce dirham rapporte **2,12** dirhams. L'entreprise a un intérêt évident à desserrer son budget — et elle sait désormais de combien.

Les limites de la méthode

Trois restrictions assumées

1. **Une seule contrainte.** Avec plusieurs, on introduit un λ par contrainte; le principe est identique, les calculs plus lourds.
2. **Une contrainte d'égalité.** Les contraintes d'inégalité ($20L + 40K \leq 2000$) relèvent des conditions de Kuhn et Tucker, hors programme.
3. **La condition du second ordre** sous contrainte, qui exige un déterminant particulier, n'est pas exigée ici.

Comment conclure sans le second ordre

Sur les problèmes de ce cours, la nature de l'optimum se justifie par le contexte : maximiser une production concave sous un budget donne un maximum, minimiser un coût convexe donne un minimum.

Le bon sens économique remplace ici un calcul lourd — mais il faut savoir que ce calcul existe.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Essayer d'abord la **substitution**; elle suffit souvent.
2. Sinon, former le **lagrangien** $\mathcal{L} = f + \lambda(c - g)$ et annuler ses trois dérivées partielles.
3. La dérivée par rapport à λ **redonne la contrainte**.
4. À l'optimum, courbe de niveau et contrainte sont **tangentes**; en pratique, on égalise les deux expressions de λ .
5. λ est le **prix implicite** de la contrainte : ce que vaut une unité de ressource supplémentaire.

La suite

Deux fois déjà, la solution est passée par la résolution d'un **système d'équations** : au chapitre 7 pour les points critiques, ici pour combiner tangence et contrainte.

Avec trois inconnues ou plus, la substitution ne tient plus. La partie III construit l'outil qui traite ces systèmes de façon systématique.