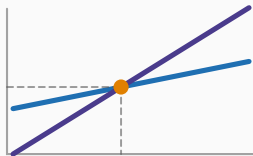


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 7 : Optimiser sans contrainte



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

La condition du premier ordre

Attention : la condition ne suffit pas

La condition du second ordre

La méthode complète

Ce qu'il faut retenir

La condition du premier ordre

L'idée, en une image

Au sommet d'une colline, le sol est horizontal — **dans toutes les directions**. Que l'on marche vers l'est ou vers le nord, on ne monte plus.

Traduit en dérivées : les deux pentes sont nulles en même temps.

Condition du premier ordre

Si f admet un extremum en (a, b) , alors nécessairement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Un tel point s'appelle un **point critique**.

Le lien avec la partie III

Deux conditions, deux inconnues : trouver un point critique revient à **résoudre un système de deux équations**.

Quand les dérivées partielles sont linéaires — ce qui est le cas de tous les exemples de ce cours — c'est un système **linéaire**. C'est exactement l'objet de la partie III, et c'est pourquoi elle vient après.

Le profit à deux produits

$$\Pi(x, y) = 40x + 60y - x^2 - y^2 - xy$$

$$\begin{cases} \Pi'_x = 40 - 2x - y = 0 \\ \Pi'_y = 60 - 2y - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 40 \\ x + 2y = 60 \end{cases}$$

La résolution

Par substitution

De la première équation : $y = 40 - 2x$.

En reportant dans la seconde :

$$x + 2(40 - 2x) = 60 \implies x + 80 - 4x = 60 \implies -3x = -20 \implies x = \frac{20}{3} \approx 6,67$$

Puis $y = 40 - \frac{40}{3} = \frac{80}{3} \approx 26,67$.

Le point critique est $\left(\frac{20}{3}; \frac{80}{3}\right)$.

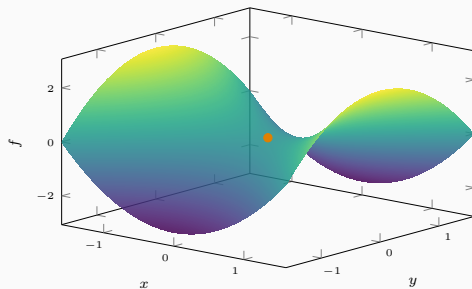
Une remarque de méthode

Avec deux équations, la substitution suffit. Avec trois ou quatre variables, elle devient vite illisible.

C'est précisément le problème que le pivot de Gauss résoudra au chapitre 11 — et c'est la raison pour laquelle l'algèbre linéaire figure dans un cours de mathématiques pour la gestion.

Attention : la condition ne suffit
pas

Le point selle



en $(0, 0)$ les deux dérivées partielles sont nulles, et pourtant ce n'est ni un maximum ni un minimum : c'est un **point selle**.

D'où la nécessité d'un critère de second ordre.

Point selle

Un **point selle** est un point critique qui n'est ni un maximum ni un minimum : la fonction y est maximale dans une direction et minimale dans l'autre.

Le col de montagne

C'est la forme d'un col entre deux sommets, ou d'une selle de cheval : le point le plus bas de la crête, mais le point le plus haut du chemin qui traverse.

Un randonneur qui n'examinerait que la direction nord conclurait à un sommet; celui qui regarde vers l'est verrait un creux. Les deux ont raison — et c'est pour cela qu'il faut un second critère.

Ce n'est pas une curiosité mathématique

Un point selle est fréquent dès qu'il existe une interaction forte entre deux décisions. Le retenir pour un maximum conduirait à une politique commerciale qui semble optimale sur chaque produit pris séparément, et qui ne l'est pas globalement.

Il faut donc un critère qui examine **toutes** les directions à la fois, pas seulement les deux axes.

La condition du second ordre

Le nombre à calculer

En un point critique (a, b) , on pose

$$\Delta = f''_{xx} \times f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

La règle de décision

Si...	et...	alors le point est un...
$\Delta > 0$	$f''_{xx} < 0$	maximum local
$\Delta > 0$	$f''_{xx} > 0$	minimum local
$\Delta < 0$		point selle
$\Delta = 0$		cas indéterminé

Elle se lit en deux temps

Premier temps, le signe de Δ : il dit s'il s'agit d'un vrai extremum ($\Delta > 0$) ou d'un point selle ($\Delta < 0$).

Second temps, le signe de f''_{xx} : il dit lequel des deux. Et c'est exactement la règle du chapitre 4 — négatif pour un maximum, positif pour un minimum.

Vous ne retenez donc qu'une chose de nouveau : calculer Δ d'abord.

Pourquoi le terme croisé est retranché

$(f''_{xy})^2$ est toujours positif, et il est **soustrait**. Autrement dit : plus l'interaction entre les deux variables est forte, plus Δ risque de devenir négatif, et plus le point risque d'être une selle.

Ce sont bien les interactions entre décisions qui créent les points selles.

Retour au profit à deux produits

$$\Pi''_{xx} = -2, \quad \Pi''_{yy} = -2, \quad \Pi''_{xy} = -1$$

$$\Delta = (-2)(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

Et $\Pi''_{xx} = -2 < 0$. Le point critique est donc un **maximum**.

Le profit maximal

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{20}{3}, \frac{80}{3}\right) &= 40 \times \frac{20}{3} + 60 \times \frac{80}{3} - \frac{400}{9} - \frac{6400}{9} - \frac{1600}{9} \\ &= \frac{800}{3} + \frac{4800}{3} - \frac{8400}{9} = \frac{16\,800}{9} - \frac{8400}{9} = \frac{8400}{9} \approx 933,33\end{aligned}$$

Un cas de point selle

La fonction g définie par $g(x, y) = x^2 - y^2$

Dérivées premières : $g'_x = 2x$ et $g'_y = -2y$. Point critique unique : $(0, 0)$.

Dérivées secondes : $g''_{xx} = 2$, $g''_{yy} = -2$, $g''_{xy} = 0$.

$$\Delta = 2 \times (-2) - 0 = -4 < 0$$

C'est un **point selle** — celui de la figure précédente.

Le contrôle qui aurait échoué

Ici $g''_{xx} = 2 > 0$. Un étudiant qui appliquerait la règle du chapitre 4 sans calculer Δ conclurait à un minimum, et se tromperait.

Le calcul de Δ n'est pas facultatif.

La méthode complète

Les cinq étapes

1. Écrire la fonction et son domaine.
2. Calculer les deux dérivées partielles premières.
3. Les annuler : **résoudre le système** et obtenir les points critiques.
4. Calculer les trois dérivées secondes, puis Δ ; conclure sur la nature.
5. Calculer la valeur de f au point retenu et **interpréter**.

La comparaison avec le chapitre 4

Une variable	Deux variables
$f'(x) = 0$	$f'_x = 0$ et $f'_y = 0$
une équation	un système
signe de f''	signe de Δ , puis de f''_{xx}
maximum ou minimum	maximum, minimum, ou point selle

La logique est identique. Seule la troisième colonne de possibilités est nouvelle.

Prix et publicité

Une entreprise réalise un profit

$$\Pi(p, a) = (p - 10)(200 - 5p + 8a) - a^2$$

où p est le prix de vente et a le budget publicitaire, en milliers de dirhams.

Développement :

$$\Pi(p, a) = 200p - 5p^2 + 8pa - 2000 + 50p - 80a - a^2 = -5p^2 - a^2 + 8pa + 250p - 80a - 2000$$

Dérivées premières :

$$\Pi'_p = -10p + 8a + 250, \quad \Pi'_a = -2a + 8p - 80$$

Deux équations, deux inconnues

$$\begin{cases} -10p + 8a = -250 \\ 8p - 2a = 80 \end{cases}$$

De la seconde : $a = 4p - 40$. En reportant :

$$-10p + 8(4p - 40) = -250 \implies -10p + 32p - 320 = -250 \implies 22p = 70$$

$$p = \frac{70}{22} \approx 3,18$$

Un résultat qu'il faut savoir refuser

Le prix optimal serait de 3,18 dirhams – **inférieur au coût unitaire de 10 dirhams**. L'entreprise vendrait à perte.

Et le contrôle du second ordre confirme le problème : $\Pi''_{pp} = -10$, $\Pi''_{aa} = -2$, $\Pi''_{pa} = 8$, donc

$$\Delta = (-10)(-2) - 64 = 20 - 64 = -44 < 0$$

C'est un **point selle**. Le modèle n'a pas d'optimum intérieur : l'effet de la publicité y est trop puissant, la spécification est mal calibrée.

Un modèle mal spécifié se détecte par le second ordre. C'est un usage professionnel de ce critère.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Condition du premier ordre : **les deux dérivées partielles s'annulent** simultanément.
2. La chercher revient à **résoudre un système** de deux équations.
3. Elle ne suffit pas : il existe des **points selles**.
4. Condition du second ordre : $\Delta = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$. Si $\Delta > 0$, le signe de f''_{xx} tranche; si $\Delta < 0$, c'est une selle.
5. Un Δ négatif peut signaler un **modèle mal construit**, pas seulement une géométrie particulière.

La suite

Nous avons cherché le sommet du paysage sans aucune restriction. Or une entreprise a toujours un budget, une capacité, une contrainte.

Le chapitre 8 traite l'optimisation **sous contrainte** — et c'est le cas le plus fréquent en gestion.