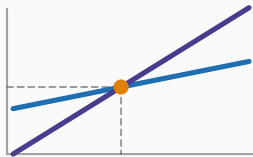


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 5 : Optimiser en gestion



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Le premier objectif du cours

Maximiser le profit

Minimiser le coût moyen

Un problème classique de gestion des stocks

La difficulté véritable

Ce qu'il faut retenir

Le premier objectif du cours

Ce chapitre n'introduit rien de nouveau

Tout l'outillage est en place : dériver, annuler la dérivée, trancher avec la dérivée seconde, comparer aux bornes.

Ce chapitre le met à l'épreuve sur quatre problèmes de gestion, traités du début à la fin. C'est là que le cours cesse d'être des mathématiques et devient une méthode de décision.

Les quatre problèmes

1. Maximiser le profit à prix fixe.
2. Maximiser le profit quand le prix dépend de la quantité.
3. Minimiser le coût moyen.
4. Choisir la quantité de commande la plus économique.

Maximiser le profit

Les données

Prix de vente $p = 40$ dirhams. Coût total $C(q) = 300 + 8q + 0,2q^2$. Capacité de l'atelier : 200 unités.

Étape 1 — la fonction et son domaine :

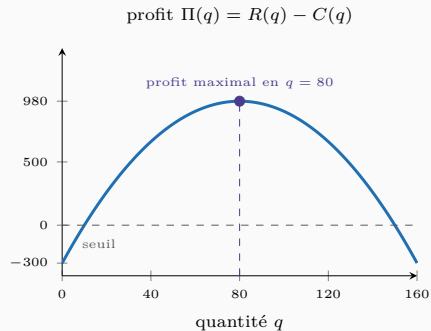
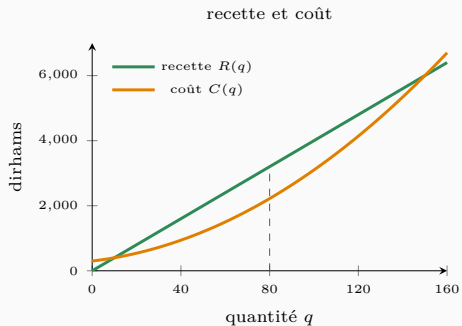
$$\Pi(q) = 40q - (300 + 8q + 0,2q^2) = -0,2q^2 + 32q - 300, \quad q \in [0; 200]$$

Étape 2 — la dérivée : $\Pi'(q) = -0,4q + 32$.

Étape 3 — le point critique : $-0,4q + 32 = 0 \implies q^* = 80$.

Étape 4 — sa nature : $\Pi''(q) = -0,4 < 0$, donc maximum.

Étape 5 — comparaison : $\Pi(0) = -300$, $\Pi(80) = 980$, $\Pi(200) = -1900$. Le maximum global est bien en $q^* = 80$.



Recette marginale égale coût marginal

$$\Pi'(q) = R'(q) - C'(q) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{R'(q) = C'(q)}$$

Le profit est maximal à la quantité où la **recette marginale égale le coût marginal**.

Vérification et interprétation

Ici $R'(q) = 40$ et $C'(q) = 8 + 0,4q$. L'égalité $40 = 8 + 0,4q$ donne bien $q = 80$.

Tant que la prochaine unité rapporte plus qu'elle ne coûte, il faut la produire. Dès qu'elle coûte plus qu'elle ne rapporte, il faut s'arrêter. L'optimum est exactement le point de bascule.

Cette règle est le résultat de gestion le plus important de tout le cours.

Le monopole, en cinq étapes

Pour écouler davantage, il faut baisser le prix : $p(q) = 50 - 0,1q$. Même coût.

1. $\Pi(q) = q(50 - 0,1q) - (300 + 8q + 0,2q^2) = -0,3q^2 + 42q - 300$.

2. $\Pi'(q) = -0,6q + 42$.

3. $q^* = 70$.

4. $\Pi'' = -0,6 < 0$: maximum.

5. $\Pi(70) = -1470 + 2940 - 300 = 1170$, contre $\Pi(0) = -300$. Maximum global.

Prix pratiqué : $p(70) = 50 - 7 = 43$ dirhams.

Le résultat contre-intuitif

La recette marginale vaut $R'(q) = 50 - 0,2q$: elle décroît **deux fois plus vite** que le prix.

Raison : vendre une unité de plus oblige à baisser le prix sur **toutes** les unités, pas seulement sur la dernière. Le gain net est donc bien inférieur au prix affiché.

C'est pour cette raison qu'un vendeur en situation de monopole restreint volontairement ses quantités.

Minimiser le coût moyen

À quelle échelle produire

$$CM(q) = \frac{300 + 8q + 0,2q^2}{q} = \frac{300}{q} + 8 + 0,2q, \quad q > 0$$

Dérivée (après simplification, comme au chapitre 3) :

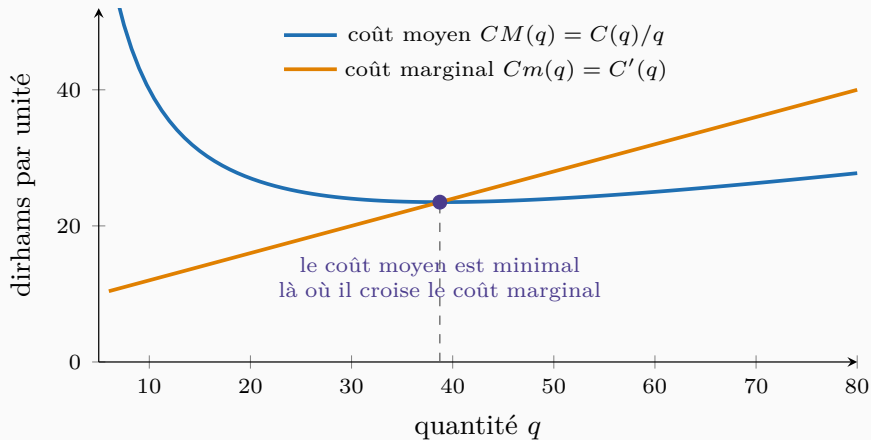
$$CM'(q) = -\frac{300}{q^2} + 0,2$$

Point critique : $0,2 = \frac{300}{q^2} \Rightarrow q^2 = 1500 \Rightarrow q^* = \sqrt{1500} \approx 38,7$.

Nature : $CM''(q) = \frac{600}{q^3} > 0$ pour $q > 0$: minimum.

Valeur : $CM(38,7) = 7,75 + 8 + 7,75 \approx 23,5$ dirhams par unité.

La seconde règle économique



Le résultat

Le coût moyen est minimal exactement là où il **égale** le coût marginal :

$$CM(q^*) = Cm(q^*)$$

Vérification

$Cm(38,7) = 8 + 0,4 \times 38,7 = 23,5$. C'est bien la valeur du coût moyen à ce point.

Pourquoi les deux courbes se croisent au minimum (suite)

L'explication par la moyenne des notes

Si l'unité suivante coûte **moins** que la moyenne actuelle, elle tire la moyenne vers le bas. Si elle coûte **plus**, elle la tire vers le haut. La moyenne est donc minimale au moment précis où la nouvelle valeur **rejoint** la moyenne.

C'est exactement le raisonnement d'un étudiant qui calcule sa moyenne générale : une note supérieure à sa moyenne la fait monter, une note inférieure la fait baisser.

La portée en gestion

$q^* \approx 39$ est la **taille efficace** de l'atelier : l'échelle à laquelle le coût unitaire est le plus faible.

En dessous, les charges fixes sont mal réparties. Au-dessus, la saturation prend le dessus. Le dimensionnement d'un outil de production se joue sur ce nombre.

Un problème classique de gestion des stocks

Le modèle de Wilson

Demande annuelle $D = 10\,000$ unités. Coût fixe par commande $K = 200$ dirhams. Coût de stockage $h = 4$ dirhams par unité et par an.

Si l'on commande q unités à la fois :

- nombre de commandes par an : D/q , d'où un coût de commande $\frac{KD}{q}$;
- stock moyen détenu : $q/2$, d'où un coût de stockage $\frac{hq}{2}$.

$$T(q) = \frac{200 \times 10\,000}{q} + \frac{4q}{2} = \frac{2\,000\,000}{q} + 2q, \quad q > 0$$

Les cinq étapes

Dérivée : $T'(q) = -\frac{2\,000\,000}{q^2} + 2.$

Point critique : $q^2 = 1\,000\,000$, donc $q^* = 1000.$

Nature : $T''(q) = \frac{4\,000\,000}{q^3} > 0$: minimum.

Coût annuel : $T(1000) = 2000 + 2000 = 4000$ dirhams.

Trois enseignements

1. Il faut commander **1000 unités à la fois**, soit dix commandes par an.
2. À l'optimum, le coût de commande **égale** le coût de stockage – **2000** dirhams chacun. Ce n'est pas un hasard : c'est une propriété générale du modèle.
3. La formule générale, obtenue par le même calcul, est $q^* = \sqrt{2KD/h}$: c'est la **formule de Wilson**, encore utilisée dans tous les logiciels de gestion des stocks.

Ce que ces quatre problèmes ont en commun

Une seule méthode, quatre habillages

Problème	Fonction	Résultat
Profit, prix fixe	$\Pi(q)$	$R' = C'$
Profit, prix variable	$\Pi(q)$	$R' = C'$
Échelle de production	$CM(q)$	$CM = Cm$
Gestion des stocks	$T(q)$	commande = stockage

Chaque fois : écrire la fonction, la dériver, annuler la dérivée, vérifier la nature, comparer aux bornes.

Les cinq étapes ne changent jamais. Seule change la fonction à écrire — et c'est bien là que se trouve la difficulté réelle du gestionnaire.

La difficulté véritable

Écrire la fonction est plus dur que la dériver

Le conseil le plus utile de ce chapitre

Dans tout examen et dans toute situation professionnelle, la partie délicate est la **mise en équation** : identifier la variable de décision, exprimer chaque coût et chaque recette en fonction d'elle.

Trois questions à se poser, dans cet ordre :

1. **Que puis-je choisir ?** C'est la variable x ou q .
2. **Que veux-je maximiser ou minimiser ?** C'est la fonction.
3. **Quelles valeurs la variable peut-elle prendre ?** C'est le domaine — et il contient souvent les bornes qui décideront de la réponse.

Une vérification finale, toujours

Le nombre obtenu est-il **plausible** ? Une quantité optimale négative, un prix supérieur au budget d'un client, un stock de dix ans de consommation : ce sont des signaux d'erreur de mise en équation, pas de calcul.

Le bon sens de gestion est le dernier contrôle du calcul mathématique.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. La méthode en cinq étapes s'applique telle quelle à tout problème d'optimisation à une variable.
2. Profit maximal $\iff$ **recette marginale égale coût marginal**.
3. Coût moyen minimal $\iff$ **coût moyen égale coût marginal**.
4. Quantité économique de commande : $q^* = \sqrt{2KD/h}$, où coût de commande et coût de stockage s'équilibrent.
5. La difficulté n'est pas de dériver, c'est d'**écrire la bonne fonction**.

La suite

Une entreprise ne choisit jamais une seule grandeur. Elle choisit un prix **et** un budget de publicité, une quantité de travail **et** une quantité de capital.

La partie II étend tout ce que nous venons de faire aux fonctions de **plusieurs** variables.