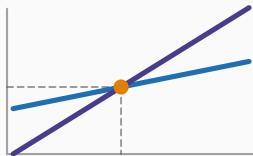


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 10 : Les matrices



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Ne garder que les nombres

Les opérations

L'écriture matricielle d'un système

Ce qu'il faut retenir

Ne garder que les nombres

Ce que l'on recopie inutilement

Dans un système, les lettres x, y, z , les signes $+$ et $=$ reviennent à chaque ligne, toujours à la même place.

Seuls les **nombres** changent. Autant ne garder qu'eux.

Matrice

Une **matrice** est un tableau rectangulaire de nombres, rangés en lignes et en colonnes.

Une matrice à m lignes et n colonnes est dite de **format** $m \times n$. Le nombre situé à la ligne i et à la colonne j se note a_{ij} .

L'atelier du chapitre 9

$$\begin{cases} 2x + y + z = 110 \\ x + 3y + 2z = 190 \\ x + y + 3z = 170 \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 110 \\ 190 \\ 170 \end{pmatrix}$$

Trois noms

- A est la matrice des **coefficients**;
- b est le **second membre**;
- $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est le vecteur des **inconnues**.

Le système s'écrit alors, en une seule ligne : $Ax = b$.

Les matrices à connaître

Nom	Description
Carrée	autant de lignes que de colonnes
Colonne (ou vecteur)	une seule colonne
Diagonale	carrée, tous les termes hors diagonale nuls
Identité I	diagonale, avec des 1 sur la diagonale
Triangulaire supérieure	tous les termes sous la diagonale sont nuls
Transposée A^T	lignes et colonnes échangées

Deux à retenir en priorité

L'**identité** joue pour les matrices le rôle du nombre 1 : $AI = IA = A$.

La forme **triangulaire supérieure** est l'objectif du pivot de Gauss : c'est la forme depuis laquelle un système se résout de proche en proche, sans effort.

Les opérations

Deux opérations sans difficulté

On additionne deux matrices **de même format**, terme à terme.

On multiplie une matrice par un nombre en multipliant **chaque** terme.

Un exemple de gestion

Ventes du premier trimestre et du deuxième, par magasin et par produit :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 120 & 80 \\ 90 & 150 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 140 & 70 \\ 110 & 160 \end{pmatrix}, \quad T_1 + T_2 = \begin{pmatrix} 260 & 150 \\ 200 & 310 \end{pmatrix}$$

Et une hausse uniforme de 10% s'écrit $1,1 \times T_1$.

Le produit de matrices

La règle : ligne par colonne

Le produit AB n'existe que si le **nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B** .

Le terme situé à la ligne i et à la colonne j de AB s'obtient en parcourant simultanément la ligne i de A et la colonne j de B , en multipliant les termes deux à deux et en additionnant :

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

Le contrôle de format, à faire systématiquement

$$(m \times n) \times (n \times p) = (m \times p)$$

Les deux n **du milieu** doivent coïncider ; ils disparaissent. Ce qui reste donne le format du résultat.

Faire ce contrôle avant tout calcul évite la moitié des erreurs.

Un calcul de coût, entièrement détaillé

Quantités produites par atelier (lignes) et par article (colonnes) :

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{pmatrix}$$

Coût unitaire de chaque article, en matières et en main-d'œuvre :

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$QP = \begin{pmatrix} 10 \times 5 + 20 \times 3 & 10 \times 2 + 20 \times 4 \\ 30 \times 5 + 40 \times 3 & 30 \times 2 + 40 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 100 \\ 270 & 220 \end{pmatrix}$$

Lecture du résultat

La première ligne concerne l'atelier 1 : il consomme 110 dirhams de matières et 100 dirhams de main-d'œuvre.

Un seul produit matriciel remplace quatre calculs séparés. C'est exactement ce que fait un tableur avec la fonction de produit matriciel — et pourquoi la comptabilité de gestion l'emploie.

Le produit n'est pas commutatif

En général, $AB \neq BA$. L'ordre des facteurs a un sens et ne peut pas être modifié.

Vérification

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Un produit nul sans facteur nul

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec des nombres, un produit nul impose qu'un facteur soit nul. **Pas avec des matrices.** C'est la raison profonde pour laquelle on ne peut pas « diviser » par une matrice quelconque — d'où la notion d'inverse, au chapitre 12.

L'écriture matricielle d'un système

Le produit Ax

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 3y + 2z \\ x + y + 3z \end{pmatrix}$$

Écrire $Ax = b$ redonne bien, ligne à ligne, les trois équations de départ.

Ce que cette écriture apporte

Le système ressemble maintenant à une équation du premier degré $ax = b$, dont la solution serait $x = b/a$.

Toute la fin du cours consiste à donner un sens à cette division — c'est-à-dire à construire A^{-1} tel que $x = A^{-1}b$.

Matrice augmentée

On accole le second membre à droite de la matrice des coefficients :

$$[A \mid b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 110 \\ 1 & 3 & 2 & 190 \\ 1 & 1 & 3 & 170 \end{array} \right)$$

C'est l'objet sur lequel travaille le chapitre 11

Tout le système tient dans ce tableau de douze nombres. Résoudre reviendra à le transformer, ligne par ligne, jusqu'à ce que la solution se lise directement.

Le trait vertical n'a aucune valeur mathématique : il rappelle simplement où finissent les coefficients et où commence le second membre.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Une matrice est un tableau de nombres; un système s'écrit $Ax = b$.
2. Addition et multiplication par un nombre se font **terme à terme**.
3. Le produit se fait **ligne par colonne**, et n'existe que si les formats s'accordent :
 $(m \times n)(n \times p) = (m \times p)$.
4. Le produit **n'est pas commutatif**, et un produit peut être nul sans qu'aucun facteur le soit.
5. La **matrice augmentée** $[A \mid b]$ contient tout le système.

La suite

L'écriture est en place. Le chapitre 11 donne la méthode : transformer la matrice augmentée jusqu'à une forme triangulaire, puis remonter.