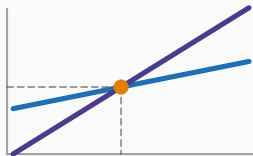


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 1 : Le langage des fonctions



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Pourquoi ce cours ?

Prérequis

La notion de fonction

Les fonctions usuelles

Lire une fonction en gestion

Ce qu'il faut retenir

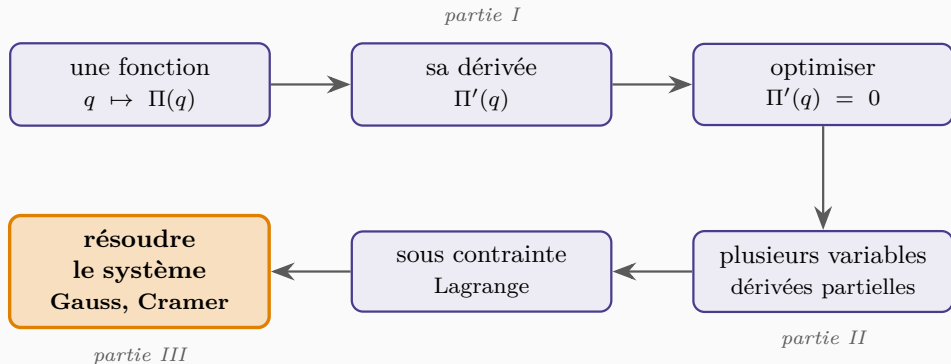
Pourquoi ce cours?

Ce que vous saurez faire à la fin

1. **Optimiser** une fonction avec une ou plusieurs variables, libre ou sous contrainte :
 - Trouver la quantité qui maximise un profit,
 - Trouver la quantité qui minimise un coût.
2. **Résoudre** un système d'équations linéaires :
 - Répartir un budget,
 - Équilibrer des flux,
 - Calculer des quantités qui doivent satisfaire plusieurs conditions à la fois.

Tout le reste est un moyen

Les dérivées, les matrices, les déterminants ne sont pas des objectifs. Ce sont les outils qui permettent d'atteindre ces deux résultats. Chaque notion introduite dans ce cours l'est parce qu'elle sert à l'un des deux, jamais pour elle-même.



Prérequis

Vous n'avez pas besoin d'être un scientifique

Un gestionnaire n'a pas à démontrer des théorèmes. Il a besoin de savoir **lire** une relation entre deux grandeurs, de savoir **quel calcul** répond à sa question, et de savoir **interpréter** le nombre qui en sort.

Ce cours est construit dans cet ordre : d'abord le sens, ensuite la technique, et toujours un exemple de gestion à côté de la formule.

Ce que ce cours suppose acquis

Aucun cours préalable

Le programme du baccalauréat, et rien de plus :

- Manipuler une expression algébrique,
- Résoudre une équation du second degré,
- Lire un graphique.

Les notions mobilisées

- Développer, factoriser, isoler une inconnue.
- Reconnaître une droite, une parabole.
- Savoir ce qu'est un repère.

Repris depuis le début

La fonction, la dérivée et la matrice sont introduites depuis leur définition. Aucune familiarité préalable n'est supposée.

La notion de fonction

Qu'est ce qu'une fonction ?

Fonction

Une **fonction** f est une règle qui, à chaque valeur d'une grandeur x , associe **une seule** valeur d'une autre grandeur, notée $f(x)$.

On écrit $f : x \mapsto f(x)$, qui se lit « f envoie x sur $f(x)$ ».

Exemple : Fonction de coût

Le coût de production est une fonction de la quantité produite : $C(q) = 0.2q^2 + 8q + 300$

La condition « une seule valeur » est la seule vraie exigence : à une même quantité produite doit correspondre un seul coût, sinon la relation n'est pas une fonction.

Les trois termes à retenir

- La **variable** x : ce qu'on fait varier (la quantité produite, le prix affiché, le nombre de vendeurs).
- L'**image** $f(x)$: ce qui en résulte (le coût, la recette, le profit).
- L'**ensemble de définition** $\mathcal{D}_f$: les valeurs de x pour lesquelles le calcul de $f(x)$ a un sens.

L'ensemble de définition est une question de gestion, pas de mathématiques

- Pour un coût $C(q)$, on impose $q \geq 0$: une quantité négative n'existe pas.
- Pour un coût moyen $C(q)/q$, on impose $q > 0$: on ne divise pas par zéro.

Dans ce cours, l'ensemble de définition est presque toujours dicté par la situation économique.

Trois façons de donner la même fonction

Une fonction, trois représentations

Forme	Exemple	Ce qu'elle permet
Formule	$C(q) = 300 + 8q + 0,2q^2$	calculer, dériver
Tableau	$q = 10 \Rightarrow C = 400$	lire une valeur précise
Graphique	la courbe de C	voir la forme d'ensemble

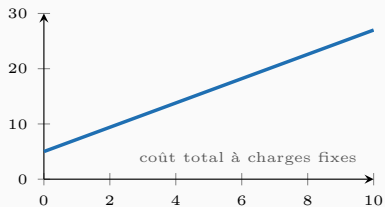
Passer de l'une à l'autre est l'essentiel du métier

La formule sert au calcul, le graphique sert à la décision. Un dirigeant ne lit pas une dérivée : il lit une courbe. Savoir traduire l'une dans l'autre est exactement ce qu'on vous demande.

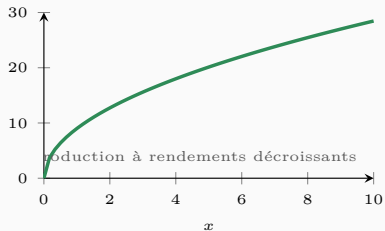
Les fonctions usuelles

Quatre familles de fonctions

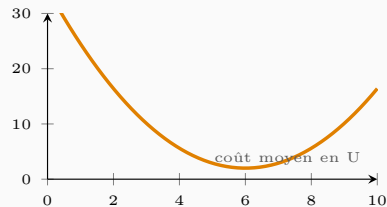
affine : $f(x) = ax + b$



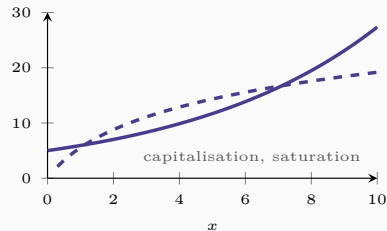
racine : $f(x) = a\sqrt{x}$



quadratique : $f(x) = ax^2 + bx + c$



exponentielle et logarithme



La fonction affine

$$f(x) = ax + b$$

- a est la **pente** : de combien f augmente quand x augmente de 1 ;
- b est l'**ordonnée à l'origine** : la valeur de f quand $x = 0$.

Sa représentation est une droite.

En gestion

Le coût total à charges fixes : $C(q) = 5000 + 30q$. Les 5000 dirhams sont dus même sans produire (loyer, assurance); chaque unité produite coûte 30 dirhams de plus.

La recette d'un prix fixe : $R(q) = 40q$. La pente est le prix de vente.

La fonction quadratique

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ avec } a \neq 0.$$

Sa représentation est une **parabole** : tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$.

Pourquoi elle est partout en gestion

C'est la fonction la plus simple qui possède un **sommet** : un minimum si elle est tournée vers le haut, un maximum sinon.

Or toute la partie « analyse » de ce cours cherche des maximums et des minimums. La parabole est le cas d'école : le profit qui monte puis redescend, le coût moyen qui baisse puis remonte.

Deux fonctions qui ralentissent

- La racine : $f(x) = a\sqrt{x}$, définie pour $x \geq 0$, croissante mais de plus en plus lentement.
- Le logarithme : $f(x) = a \ln(x)$, défini pour $x > 0$, même comportement, encore plus lent.

Les rendements décroissants

Doubler le nombre d'ouvriers ne double pas la production : le deuxième atelier gêne le premier, les machines saturent. Une production $Q(L) = 20\sqrt{L}$ traduit exactement cela.

C'est la forme la plus courante des fonctions de production en gestion.

La fonction exponentielle

$f(x) = a e^{rx}$ – croissance à **taux constant** : chaque période, la grandeur est multipliée par le même facteur.

La capitalisation

Un capital K_0 placé au taux continu r vaut $K(t) = K_0 e^{rt}$ après t années.

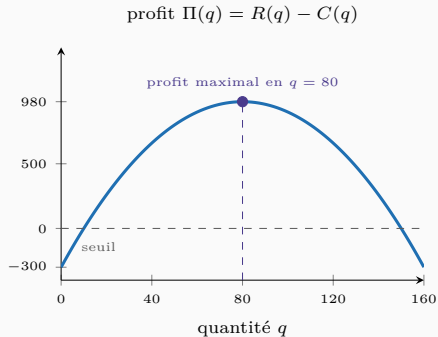
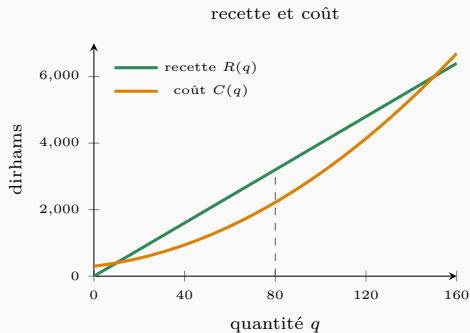
C'est aussi la forme de la croissance d'un chiffre d'affaires à taux constant, ou d'un encours de crédit qui court.

Exponentielle et logarithme sont l'aller et le retour

L'exponentielle transforme une durée en un capital. Le logarithme fait l'inverse : il répond à « combien de temps pour atteindre ce montant ». Chacune défait ce que l'autre fait.

Lire une fonction en gestion

Le triptyque coût, recette, profit



Les trois fonctions de base

Fonction	Définition	Lecture
Coût	$C(q)$	ce que produire q unités coûte
Recette	$R(q) = p \cdot q$	ce que vendre q unités rapporte
Profit	$\Pi(q) = R(q) - C(q)$	la différence

Sans aucun calcul, on voit déjà trois choses

1. En dessous d'une certaine quantité, le profit est **négatif** : les charges fixes ne sont pas couvertes.
2. Il existe un **seuil de rentabilité**, là où la courbe de profit coupe l'axe.
3. Le profit **monte puis redescend** : produire toujours plus n'est pas la bonne réponse.

C'est ce troisième point qui rend l'optimisation nécessaire — et c'est l'objet des quatre chapitres suivants.

Un calcul complet

Avec $R(q) = 40q$ et $C(q) = 300 + 8q + 0,2q^2$:

$$\Pi(q) = 40q - 300 - 8q - 0,2q^2 = -0,2q^2 + 32q - 300$$

Le seuil de rentabilité est la solution de $\Pi(q) = 0$, c'est-à-dire $0,2q^2 - 32q + 300 = 0$.

Discriminant : $\Delta = 32^2 - 4 \times 0,2 \times 300 = 1024 - 240 = 784$, donc $\sqrt{\Delta} = 28$.

$$q = \frac{32 \pm 28}{0,4} \implies q_1 = 10 \text{ et } q_2 = 150$$

Ce que ces deux nombres signifient

En dessous de **10** unités, l'entreprise perd de l'argent : trop peu de volume pour absorber les **300** dirhams de charges fixes. Au-delà de **150** unités, elle en perd de nouveau : les coûts croissent plus vite que la recette.

La zone de profit est un intervalle, pas une demi-droite. C'est une idée que les étudiants n'anticipent presque jamais.

La question qui reste

On voit que le profit passe par un maximum. On voit à peu près où. Mais « à peu près » ne permet pas de décider d'un plan de production.

Il faut un instrument qui donne la valeur **exacte** de la quantité optimale, et qui fonctionne pour n'importe quelle fonction, pas seulement pour une parabole.

Cet instrument est la **dérivée**. C'est le chapitre 2.

Ce qu'il faut retenir

Quatre points

1. Une fonction est une règle qui associe **une seule** image à chaque valeur de la variable.
2. Quatre familles suffisent en gestion : affine, quadratique, racine et logarithme, exponentielle.
3. Le triptyque coût, recette, profit se lit graphiquement : seuil de rentabilité, zone de profit, maximum.
4. La lecture graphique donne les idées; elle ne donne pas les nombres. D'où la suite.

Le mot d'ordre

Avant de calculer, **dessiner**. Une courbe mal comprise donne un calcul juste et une décision fausse.