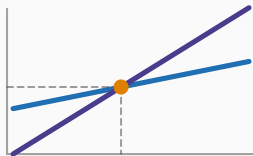


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 6 : Les fonctions de deux variables



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Pourquoi deux variables

Représenter une fonction de deux variables

Les dérivées partielles

Les dérivées d'ordre deux

Ce qu'il faut retenir

Pourquoi deux variables

Une entreprise ne choisit jamais une seule grandeur

Trois décisions réelles

- Un producteur choisit une quantité de **travail** L **et** une quantité de **capital** K .
- Un commerçant fixe un **prix** p **et** un budget de **publicité** a .
- Une entreprise multi-produits décide des quantités x **et** y de deux articles.

Dans chaque cas, le résultat dépend de **deux** décisions prises ensemble. Une fonction d'une seule variable ne peut pas représenter cela.

La bonne nouvelle

Tout ce que vous savez faire va se transposer presque à l'identique.

Dériver, annuler la dérivée, vérifier avec la dérivée seconde : la démarche du chapitre 4 reste valable. Il y aura simplement **deux** dérivées au lieu d'une, et **deux** équations à résoudre au lieu d'une.

Fonction de deux variables

Une **fonction de deux variables** est une règle qui, à chaque couple (x, y) , associe un nombre unique $f(x, y)$.

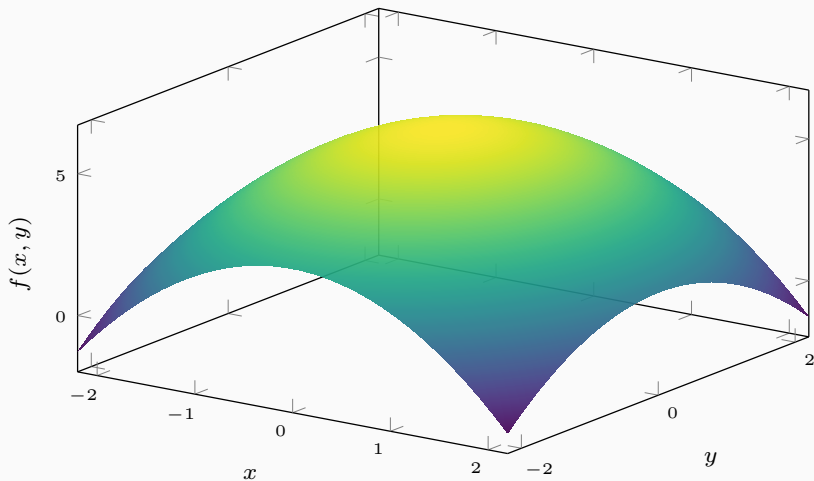
On écrit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$.

Trois exemples de gestion

Fonction	Nom	Signification
$Q(L, K) = 10 L^{0,5} K^{0,5}$	production	Cobb-Douglas
$\Pi(x, y) = 40x + 60y - x^2 - y^2 - xy$	profit	deux produits
$C(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 100$	coût	deux ateliers

Représenter une fonction de deux variables

une fonction de deux variables
n'est plus une courbe :
c'est une surface



Du fil de fer au paysage

Une fonction d'une variable est une **courbe** : un fil tendu au-dessus d'un axe.

Une fonction de deux variables est une **surface** : un paysage au-dessus d'un plan. Chaque point du sol est un couple (x, y) ; l'altitude au-dessus de ce point est $f(x, y)$.

Chercher un maximum revient alors à chercher le **sommet** de ce paysage.

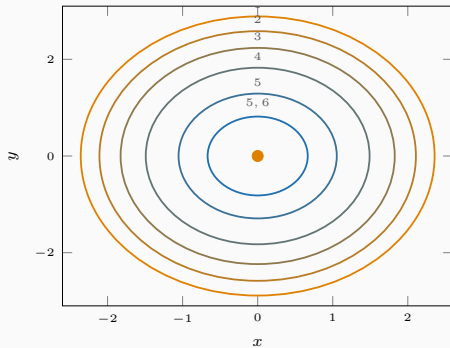
La limite pratique

Une surface est difficile à dessiner et impossible à lire précisément. Et au-delà de deux variables, on ne peut plus rien dessiner du tout.

D'où l'intérêt d'une seconde représentation, plate celle-là, et beaucoup plus commode.

Les courbes de niveau

les courbes de niveau de $f(x, y) = 6 - 0,9x^2 - 0,6y^2$



chaque courbe rassemble les points où la fonction vaut la même chose — comme les lignes d'altitude d'une carte de randonnée.

En gestion : une *isoquante* (même production) ou une *courbe d'indifférence*.

Courbe de niveau

La **courbe de niveau** c de f est l'ensemble des couples (x, y) tels que

$$f(x, y) = c$$

C'est la trace, dans le plan, de tous les points où la fonction prend la même valeur.

La carte de randonnée

Une carte topographique représente un relief en trois dimensions sur une feuille plate, au moyen de lignes d'altitude constante.

Les courbes de niveau font exactement cela pour une fonction. Et comme sur une carte : **des courbes resserrées signalent une pente raide**, des courbes espacées une zone plate.

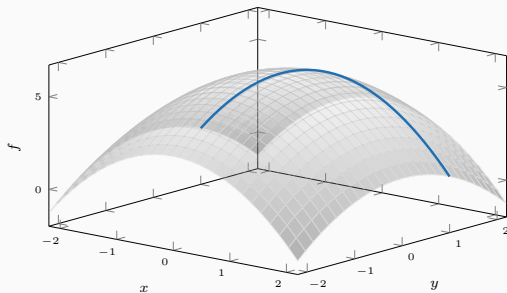
Les deux noms qu'elles portent en gestion

- Pour une fonction de **production**, une courbe de niveau s'appelle une **isoquante** : toutes les combinaisons de travail et de capital qui donnent la même production.
- Pour une fonction d'**utilité** ou de satisfaction, on parle de **courbe d'indifférence**.

Ces deux objets, que vous rencontrez en microéconomie, ne sont rien d'autre que des courbes de niveau.

Les dérivées partielles

L'idée : figer une variable



on fixe $y = 1$ et on ne regarde plus
que la courbe bleue : une fonction
d'une seule variable.

Sa pente, c'est la dérivée partielle
 $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Dérivées partielles

La **dérivée partielle** de f par rapport à x , notée $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou f'_x , s'obtient en dérivant f par rapport à x en traitant y comme une constante.

Symétriquement pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, en traitant x comme une constante.

Toutes choses égales par ailleurs

Une dérivée partielle répond à : « si je fais varier **cette seule** grandeur, l'autre restant fixe, de combien le résultat change-t-il ? »

C'est la traduction mathématique exacte de l'expression *toutes choses égales par ailleurs*, que vous employez déjà en économie. Vous connaissiez le raisonnement; voici son instrument.

Un premier calcul

$$f(x, y) = 3x^2y + 5x - 2y^3 + 7$$

Par rapport à x — on traite y comme un nombre fixe :

- $3x^2y$: le facteur $3y$ est constant, donc la dérivée est $3y \times 2x = 6xy$;
- $5x$ donne 5;
- $-2y^3$ et 7 ne contiennent pas x : ce sont des constantes, donc 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 5$$

Par rapport à y — on traite x comme un nombre fixe :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 6y^2$$

Le seul réflexe à acquérir

Il n'y a **aucune règle nouvelle** à apprendre. Ce sont les formules du chapitre 3, appliquées en considérant l'autre lettre comme un simple nombre.

Le piège est là : voir y comme une lettre et non comme une constante. Dans $3x^2y$, le nombre $3y$ joue exactement le rôle du $0,2$ de $0,2q^2$.

La fonction de production de Cobb-Douglas

$$Q(L, K) = 10 L^{0,5} K^{0,5}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 10 \times 0,5 L^{-0,5} K^{0,5} = \frac{5K^{0,5}}{L^{0,5}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{5L^{0,5}}{K^{0,5}}$$

En $L = 100$ et $K = 25$:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{5 \times 5}{10} = 2,5, \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{5 \times 10}{5} = 10$$

La décision qui en découle

Ces deux nombres sont les **productivités marginales** : un ouvrier de plus apporte 2,5 unités, une machine de plus en apporte 10.

Si les deux facteurs coûtent le même prix, il faut manifestement investir en capital plutôt qu'en travail. La comparaison des dérivées partielles est un outil d'arbitrage immédiat.

Les dérivées d'ordre deux

Quatre dérivées secondes

Les notations

En dérivant à nouveau chacune des deux dérivées partielles, on obtient quatre expressions :

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Théorème de Schwarz

Pour toutes les fonctions rencontrées en gestion,

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

L'ordre de dérivation est sans importance : il n'y a donc que **trois** dérivées secondes distinctes à calculer.

Trois nombres, trois questions

- f''_{xx} : la courbure dans la direction x . Le profit ralentit-il quand on augmente x ?
- f''_{yy} : la même chose dans la direction y .
- f''_{xy} : l'**interaction**. Est-ce que y modifie l'effet de x ?

Le terme croisé est le plus riche

Si $f''_{xy} > 0$, les deux variables se **renforcent** : plus de publicité rend chaque baisse de prix plus efficace. Les facteurs sont complémentaires.

Si $f''_{xy} < 0$, elles se **concurrentent** : les deux produits se cannibalisent, augmenter les ventes de l'un réduit l'apport de l'autre.

Aucune dérivée d'une fonction d'une variable ne peut exprimer cela. C'est l'apport propre des deux variables.

Les trois dérivées secondes

$$\Pi(x, y) = 40x + 60y - x^2 - y^2 - xy$$

Dérivées premières :

$$\Pi'_x = 40 - 2x - y, \quad \Pi'_y = 60 - 2y - x$$

Dérivées secondes :

$$\Pi''_{xx} = -2, \quad \Pi''_{yy} = -2, \quad \Pi''_{xy} = -1$$

Lecture

Les deux courbures sont négatives : le profit plafonne dans chaque direction, ce qui est le comportement attendu.

Le terme croisé -1 indique que les deux produits se **gênent** légèrement : vendre plus du premier réduit le rendement du second. Deux articles d'une même gamme, par exemple.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Une fonction de deux variables se représente par une **surface**, ou plus commodément par ses **courbes de niveau**.
2. Isoquante et courbe d'indifférence sont des courbes de niveau.
3. Une **dérivée partielle** se calcule en traitant l'autre variable comme une constante : aucune règle nouvelle.
4. Les dérivées partielles sont les grandeurs **marginales** de chaque facteur; leur comparaison guide l'arbitrage.
5. Trois dérivées secondes distinctes, dont la **croisée** f''_{xy} qui mesure l'interaction entre les deux variables.

La suite

Vous savez calculer les pentes dans les deux directions. Le chapitre 7 s'en sert pour trouver le sommet du paysage : annuler les deux dérivées partielles à la fois.