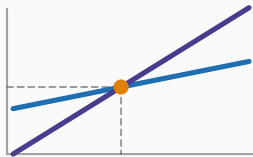


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 12 : Déterminant, inverse et formules de Cramer



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Le déterminant

La matrice inverse

Les formules de Cramer

Bilan de la partie III

Bilan du cours

Le déterminant

La question à laquelle il répond

Avant même de résoudre, on aimerait savoir si le système $Ax = b$ a une solution unique.

Le déterminant de A est un nombre qui répond à cette question à lui seul : s'il est différent de zéro, la solution est unique; s'il est nul, elle ne l'est pas.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Un premier calcul

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 1 = 5$$

L'ordre 3 : la règle de Sarrus

La règle de Sarrus

On recopie les deux premières colonnes à droite du tableau, puis on additionne les trois produits des diagonales descendantes et l'on retranche les trois produits des diagonales montantes :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Le déterminant de l'atelier

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Descendantes : $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$, $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Somme : 21.

Montantes : $1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$, $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, $1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$. Somme : 10.

$$\det A = 21 - 10 = 11$$

Une mise en garde

La règle de Sarrus ne vaut **que** pour les matrices d'ordre 3. Elle est fausse à l'ordre 4, où il faut développer selon une ligne ou une colonne.

Dans ce cours, on s'arrête à l'ordre 3.

Le critère

$\det A \neq 0 \iff$ le système $Ax = b$ admet une solution unique

On dit alors que A est **inversible**, ou **régulière**.

Pourquoi un déterminant nul est un signal

Un déterminant nul signifie qu'une équation est une combinaison des autres : elle **n'apporte rien**.

Selon que le second membre est ou non cohérent avec cette dépendance, on retrouve les deux cas du chapitre 9 : aucune solution, ou une infinité.

La lecture de gestion

$\det A = 11 \neq 0$: les trois postes de l'atelier imposent trois contraintes **réellement distinctes**. Le plan de production est déterminé.

Si le déterminant avait été nul, cela aurait voulu dire qu'un poste ne fait que reproduire l'information des deux autres — et qu'il fallait revoir la modélisation.

La matrice inverse

Matrice inverse

La matrice A^{-1} est celle qui vérifie

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

Elle n'existe que si $\det A \neq 0$.

Ce qu'elle permet

$$Ax = b \implies A^{-1}Ax = A^{-1}b \implies \boxed{x = A^{-1}b}$$

C'est enfin la « division » annoncée au chapitre 10.

Attention à l'ordre : on multiplie **à gauche**, des deux côtés. Le produit n'étant pas commutatif, écrire $x = b A^{-1}$ n'a même pas de sens du point de vue des formats.

La formule à retenir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

On échange les termes de la diagonale, on change le signe des deux autres, et l'on divise par le déterminant.

Un calcul et sa vérification

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det A = 5, \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$A A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = I$$

Deux voies

1. **Par les cofacteurs** : calculer les neuf mineurs, appliquer la règle des signes, transposer, diviser par le déterminant. Long et propice aux erreurs.
2. **Par Gauss-Jordan** : écrire $[A \mid I]$ et appliquer le pivot jusqu'à obtenir $[I \mid A^{-1}]$. C'est la méthode à retenir.

L'inverse de la matrice de l'atelier

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

La solution, par simple produit

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 110 \\ 190 \\ 170 \end{pmatrix}$$

Première ligne : $\frac{7(110) - 2(190) - 170}{11} = \frac{770 - 380 - 170}{11} = \frac{220}{11} = 20.$

Deuxième : $\frac{-110 + 950 - 510}{11} = \frac{330}{11} = 30.$ Troisième : $\frac{-220 - 190 + 850}{11} = \frac{440}{11} = 40.$

On retrouve (20; 30; 40).

Quand l'inverse est vraiment utile

Le second membre qui change

Calculer A^{-1} coûte plus cher que d'appliquer Gauss une fois. **Pour un système isolé, l'inverse n'a aucun intérêt.**

Il devient précieux quand la matrice reste la même et que le second membre change : les capacités varient d'une semaine à l'autre, la demande change de mois en mois.

On calcule A^{-1} **une seule fois**, puis chaque nouveau plan s'obtient par un simple produit — quelques secondes au lieu d'une résolution complète.

Le second usage, plus important encore

A^{-1} donne directement la **sensibilité** de la solution : le terme de la ligne i et de la colonne j indique de combien l'inconnue i varie lorsque la ressource j augmente d'une unité.

Ici, $\frac{7}{11} \approx 0,64$: une heure de découpe supplémentaire permet 0,64 article A de plus.

C'est le pendant, en algèbre linéaire, du multiplicateur de Lagrange du chapitre 8.

Les formules de Cramer

Formules de Cramer

Si $\det A \neq 0$, l'unique solution de $Ax = b$ est donnée par

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

où A_i est la matrice A dans laquelle la **colonne** i a été remplacée par le second membre b .

Ce qui plaît dans cette formule

Chaque inconnue s'obtient **indépendamment** des autres. Si le problème ne demande qu'une seule des trois quantités, on ne calcule que celle-là.

Aucune autre méthode ne permet cela.

Les trois déterminants

$\det A = 11$, et en remplaçant tour à tour chaque colonne par $b = (110; 190; 170)$:

$$\det A_1 = \det \begin{pmatrix} 110 & 1 & 1 \\ 190 & 3 & 2 \\ 170 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 220$$

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 110 & 1 \\ 1 & 190 & 2 \\ 1 & 170 & 3 \end{pmatrix} = 330, \quad \det A_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 110 \\ 1 & 3 & 190 \\ 1 & 1 & 170 \end{pmatrix} = 440$$

La solution

$$x = \frac{220}{11} = 20, \quad y = \frac{330}{11} = 30, \quad z = \frac{440}{11} = 40$$

Troisième méthode, troisième fois le même résultat.

Le calcul de $\det A_1$ par Sarrus

$$\det A_1 = \det \begin{pmatrix} 110 & 1 & 1 \\ 190 & 3 & 2 \\ 170 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Descendantes : $110 \cdot 3 \cdot 3 = 990$, $1 \cdot 2 \cdot 170 = 340$, $1 \cdot 190 \cdot 1 = 190$. Somme : 1520.

Montantes : $1 \cdot 3 \cdot 170 = 510$, $110 \cdot 2 \cdot 1 = 220$, $1 \cdot 190 \cdot 3 = 570$. Somme : 1300.

$$\det A_1 = 1520 - 1300 = 220$$

Une méthode élégante et impraticable

n	Opérations avec Gauss	Opérations avec Cramer
3	une dizaine	quelques dizaines
10	environ 300	des dizaines de millions
20	environ 2 700	hors de portée

Cramer exige de calculer $n + 1$ déterminants d'ordre n , dont le coût croît comme $n!$.

À quoi elle sert donc

Trois usages réels :

1. les **petits** systèmes, à deux ou trois inconnues, faits à la main;
2. le calcul d'**une seule** inconnue dans un système d'ordre 3;
3. les raisonnements **théoriques**, où l'on veut une expression littérale de la solution en fonction des données — ce que Gauss ne fournit pas.

Pour tout le reste : Gauss.

Bilan de la partie III

Quand employer laquelle

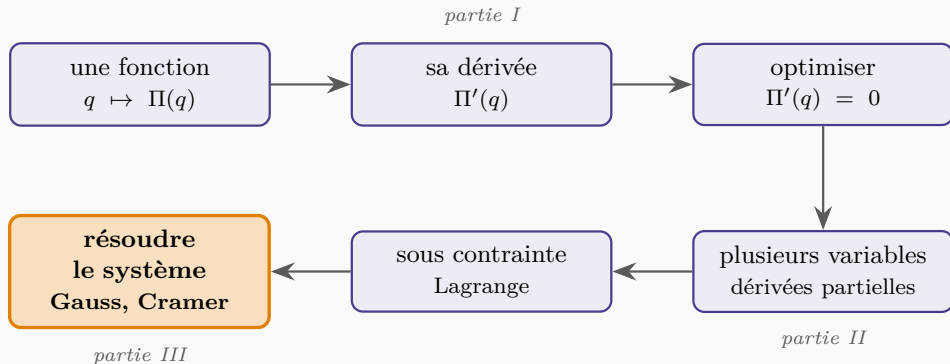
Méthode	À utiliser quand...
Gauss	cas général; c'est la méthode par défaut
Inverse	la matrice est fixe et le second membre change souvent
Cramer	petit système, ou une seule inconnue cherchée

Le contrôle commun

Quelle que soit la méthode, la vérification est la même : reporter la solution dans le système de départ.

Trois égalités qui tombent juste valent toutes les relectures de calcul.

Bilan du cours



Objectif 1 – optimiser

Situation	Condition
Une variable	$f'(x) = 0$, puis signe de f''
Deux variables, sans contrainte	$f'_x = f'_y = 0$, puis signe de Δ
Deux variables, sous contrainte	lagrangien, tangence, et lecture de λ

Objectif 2 — résoudre

Situation	Méthode
Cas général	pivot de Gauss
Second membre variable	matrice inverse
Petit système	formules de Cramer

Ce que ces deux compétences ont en commun

Les deux parties se sont rejointes en cours de route : chercher un optimum à plusieurs variables **conduit** à résoudre un système linéaire.

Ce n'est pas un hasard de programme. C'est la structure même des problèmes de décision : on écrit ce que l'on veut optimiser, on dérive, et l'on tombe sur un système.

Et ce qui reste vrai en dehors du calcul

La difficulté d'un problème de gestion n'a presque jamais été de dériver ou de pivoter. Elle a été **d'écrire la bonne fonction** et de **poser les bonnes équations**.

Ces trente heures vous ont donné les outils. Le jugement, lui, s'exerce sur des cas — et c'est l'objet des travaux dirigés.